HISTORIA
DE
LAS MATEMATICAS

POR

CARLOS WARGNY

TERCER PERIODO

(*Continuacion*)

Fontenelle se espresa en estos términos de Leibniz: «Su nombre figura a la cabeza de los problemas mas sublimes que hayan sido resueltos en nuestros dias, i se encuentra unido a lo que la Jeometria tiene de mas grande, mas difícil i mas importante.»

Su obra *Protogea*, que apareció en 1693, trata de la forma primitiva de la tierra i se considera como el primer libro de jeolojía publicado. Aplicó el principio de la continuidad a todo lo creado; i así adivinó la existencia de los zoofitos, séres intermediarios de los dos reinos orgánicos de la naturaleza.

Sus trabajos históricos no son ménos importantes; proyectó una lengua universal; redactó su *Nuevo método para estudiar i enseñar el derecho*; defendió la paz universal i escribió diversas obras de filosofía i teolojía. Empero, no se atrevió a declararse contra la astrolojía, manifestando que los movimientos de los astros pueden ser signos de las cosas terrestres, del mismo modo como las rayas de la mano son la espresion de lo que pasa en el cuerpo humano.

Las memorias que publicó en las *Acta Eruditorum* contribuyeron eficazmente a que los matemáticos se familiarizaran con el cálculo diferencial, gloria que comparte con sus amigos i admiradores abnegados, los Bernouilli. La influencia que ejercieron estos dos últimos se estendió durante la primera mitad del siglo XVIII.

Jacobo *Bernouilli* (1654-1705) nació en Basilea (Suiza), en cuya universidad fué profesor de matemáticas desde 1686 hasta su muerte. Su familia, orijinaria de Holanda, habia emigrado a Francfort, huyendo de las persecuciones relijiosas del Duque de Alba. Jacobo fué el primero que comprendió el alcance i poder del invento del *celeberrimus vir*, como era llamado Leibniz por sus contemporáneos, invento que apareció, en Mayo de 1684, en las *Acta Eruditorum*, como quedó dicho.

Sus cursos universitarios sobre el cálculo infinitesimal, publicados en forma de ensayos, en 1691, componen el curso pedagójico mas antiguo que se conoce de cálculo integral; en ellos se emplea por primera vez la palabra *integral*.

Jacobo resolvió el problema de la curva isócrona; demostró la construccion de la catenaria, imajinada por Leibniz, i la hizo estensiva a la curva de un hilo de densidad variable. Descubrió la *curva elástica* afectada por una varilla fija por un estremo i solicitado el otro estremo por una fuerza; la *lintearia*, figura que toma un rectángulo, cuyos dos lados opuestos están fijos i que está lleno de un líquido pesado; i la *velaria* o curva de una vela de buque inflada por el viento.

En 1696 propuso un premio al que resolviera el problema de los isoperímetros, es decir, de las figuras del mismo perímetro i área mínima; en 1698 dió a luz un ensayo sobre el cálculo diferencial i sus aplicaciones jeométricas, en el cual estudia las propiedades de la espiral logarítmica, *spira mirabilis* como él la llama, i hace observar de qué manera, las varias curvas que de ella se deducen, reproducen la curva primitiva; i, a imitacion de Arquímedes, pidió que se grabara en su tumba esta curva con la inscripcion: *eadem numero mutata resurgo.* Así encontró que la podaria i la evoluta de la curva considerada son la misma curva; i que las cáusticas por reflexion i por refraccion son espirales logarítmicas.

En 1695 publicó una edicion de la *Jeometria* de Descartes; i en su tratado *Ars cogetandi* (1713) deja establecidos los principios del cálculo de las probabilidades; define los números que llevan su nombre i esplica su uso; dá algunos teoremas referentes a las diferencias finitas i a las séries.

Los números de Bernouilli aparecen en el desarrollo de

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_3}{4!}x^3 + \ldots\ldots,$$

en que

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{42},\ \ldots$$

son dichos números.

Juan *Bernouilli* (1667-1748), hermano i discípulo del precedente, ocupó el puesto de profesor en las Universidades de Groninga i Basilea. Dotado de un carácter vehemente i hasta violento, fué, sin embargo, un émulo digno de su hermano. La historia detallada de sus descubrimientos i de las soluciones que dió de los problemas mas difíciles, cautiva por su temeridad i la rapidez de su pensamiento.

Su vanidad no tenia límites i su peor enemigo era el que no reconocia el talento de que se creia dotado. Parece que sustrajo i dió como suya la solucion de los isoperímetros de su hermano Jacobo; arrojó de su casa a su hijo Daniel porque la Academia de Ciencia de Paris le discernió una recompensa que él solo esperaba obtener. No obstante de sus pasiones tan mal dominadas, era considerado como el profesor mas famoso de su tiempo, pues sabia inculcar a sus alumnos el gusto apasionado que tenia por las matemáticas. Hai que atribuir a su prestijio e influencia la adopcion rápida i jeneral que tuvo el algoritmo de Leibniz en el continente i el rechazo de la notacion fluxional o del punto (•) como se llamaba.

Los principales descubrimientos de Juan Bernouilli son el cálculo esponencial, el estudio funcional de la trigonometría, las propiedades de la línea jeodésica, las trayectorias ortogonales, la resolucion de la braquistócrona i el enunciado del trabajo virtual.

A él se debe la designacion de la aceleracion de la gravedad por g i la fórmula conocida $v^2 = 2 g h$; sustituyó la notacion usada entónces, por ϕ x, para designar las funciones; el símbolo f lo emplearon Euler i Lagrange. Por último, uno de sus principales títulos de gloria es el haber sido el maestro i el apoyo de Euler.

Como el nombre Bernouilli es por muchos títulos ilustre en la historia de las ciencias exactas, damos en seguida la jenealojía de sus miembros principales.

En 1550 Jacobo Bernouilli huye de Amberes paca escapar de las persecuciones relijiosas, i se establece en Francfort del Main; uno de sus descendientes se trasladó a Basilea, donde tuvo un hijo, Nicolas, padre de Jacobo, Nicolas i Juan. Jacobo i Juan son los dos distinguidos matemáticos de quienes acabamos de hablar.

Su hermano Nicolas tuvo un hijo, que llamaremos Nicolas I; i Juan fué padre de Nicolas II, Daniel i Juan I; por último, hijos de Juan I fueron Juan II i Jacobo I. Tal es la pléyade brillante de matemáticos que figuran en la historia.

Nicolas I encontró las condiciones para que una espresion de la forma $M\,dx + N\,dy + P\,dz + \ldots\ldots$ sea una diferencial exacta.

Nicolas II (1695-1726) fué profesor en San Petersburgo i ayudó a su padre, desde los 16 años de edad, en sus especulaciones matemáticas.

De Daniel (1700-1792) hablaremos mas adelante.

Juan I (1710-1790) desempeñó la cátedra de su ilustre padre, i la Academia de Ciencias de Paris premió tres de sus obras.

Juan II (1744-1805), nombrado a los 19 años de edad astrónomo de la Academia de Berlin, desempeñó despues el cargo de director de la clase de matemáticas de la misma i compuso varias obras de astronomía i de matemáticas.

Jacobo I (1759-1789) casó con una nieta de Euler i fué profesor en San Petersburgo.

PROGRESOS DEL ANÁLISIS EN EL CONTINENTE EUROPEO

Los Bernouilli formaron una escuela brillantísima, cuyos discípulos ayudaron a difundir en toda la Europa los conocimientos del cálculo diferencial. Entre ellos figuran L'Hospital, Varignon, Nicole, De Gua, Cramer, Ricatti i Fagnano.

Guillermo Francisco Antonio *L'Hospital* (1661-1704), marques de Saint-Mesme, fué discípulo de Juan Bernouilli, hermano de Jacobo. Es esta época, los únicos que podian comprender el cálculo diferencial eran sus dos inventores Newton i Leibniz, i los discípulos de este último, Jacobo i Juan Bernouilli.

En 1695 L'Hospital resolvió el problema de la curva por la qué se desliza el contrapeso de un puente levadizo; i, dos años despues, el de la braquistócrona (cicloide), problema que resolvieron ademas Newton, Leibniz i Jacobo Bernouilli i que fué propuesto por Juan.

Con este último, estudió L'Hospital el problema del sólido de menor resistencia, resuelto por Newton en los *Principios*.

En 1696, L'Hospital publicó el primer tratado clásico de la nueva invencion con el título de *Análisis de los infinitamente pequeños*; i estableció la regla que lleva su nombre i que sirve para resolver la indeterminacion 0:0 de las funciones fraccionarias. Esta obra, que se esparció profusamente, introdujo el uso de la notacion diferencial en el continente de Europa.

En 1707, el mismo autor dió a la publicidad un estudio analítico de las secciones cónicas, que llegó a ser una obra clásica durante todo el siglo XVIII.

Pedro *Várignon* (1654-1722) era orijinario de Caen, fué miembro de la Academia de Ciencias de Paris, profesor del Colejio de Francia, amigo de Newton, Leibniz, los Bernouilli i L'Hospital i uno de los mas ardientes defensores del cálculo diferencial. Sentó con claridad los principios de la mecánica i es el autor del teorema de los momentos. Sus obras principales son: *Nueva Mecánica*, *Aclaraciones del Análisis Infinitesimal* i *Tratado del movimiento i de la medida de las aguas corrientes.*

Pedro Raimundo de *Montmort* (1678–1719) es conocido principalmente por sus trabajos sobre el cálculo de probabilidades, habiendo resuelto el *problema de las apuestas.* En 1713 determinó la suma de n términos de la série

$$n\,a + \frac{n\,(n-1)}{2\,!}\,\Delta\,a + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3\,!}\,\Delta^2\,a + \ldots.$$

Francisco *Nicole* (1683-1758) publicó su *Tratado del cálculo de las diferencias finitas* (1717 i escribió sobre las ruletas i las cúbicas estudiadas por Newton.

Antonio *Parent* (1666-1716) compuso un libro que trata de la jeometría analítica del espacio.

Juan Pablo *De Gua* de Malves (1713-1785) nació en Carcasona, Francia; dió a la estampa una obra de jeometría analítica (1740). en la que, sin emplear el cálculo diferencial, encuentra las tanjentes, asíntotas i puntos singulares de las curvas; i demostró la regla de los signos de Descartes, que Newton habia aceptado como evidente.

Gabriel *Gramer* (1704-1752), natural de Jinebra, publicó su *Tratado de las curvas aljebraicas* (1750) que es el mas completo en su jénero i que aun hoi dia es consultado con provecho; demuestra que una curva de enésimo grado queda determinada por $\frac{1}{2}$ n (n + 3) de sus puntos. Editó las obras de los dos hermanos Bernouilli; escribió sobre la causa física de la forma esferoidal planetaria, sobre el movimiento de los ápsides i sobre las cúbicas de Newton. Es el autor de la regla de su nombre, que sirve para resolver las ecuaciones indeterminadas. El denominador comun de las incógnitas del sistema

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2 ,$$

es el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

cuyo valor se obtiene restando de la diagonal principal $a_1 b_2$ la segunda diagonal $a_2 b_1$. El numerador se encuentra cambiando, en el cuadro anterior, los coeficientes de la incógnita que se busca por los términos constantes. Esta regla tan sencilla debia ser mas conocida en nuestros colejios.

Jacobo Francisco, conde *Riccati* (1676-1754), veneciano de oríjen, divulgó en Italia la física newtoniana; es el autor de la ecuacion diferencial que lleva su nombre,

$$\frac{dy}{dx} + R + Py + Qy^2 = 0,$$

R, P i Q son funciones de x.

Trató de rebajar el órden de las ecuaciones diferenciales.

Sus dos hijos, Vicente (1707-1775) i Jordano (1709-1790) estudiaron cuestiones relativas al cálculo integral i a las ecuaciones diferenciales.

Julio Cárlos, conde *Fagnano* i marques de Toschi (1682-1766), natural de Sinigaglia, Ancona, fué el primero que llamó la atencion sobre las integrales elípticas, que se encuentran en la rectificacion de la elipse i de la hipérbola; i observó que de

$$x = \sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}} \text{ sale } \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Propuso el problema, resuelto por él, de encontrar sobre la curva $x^3 = 3y$ dos arcos cuya diferencia fuera rectificable; señaló la analojia notable que presentan los arcos de un círculo i de una lemniscata; por último, estableció la relacion

$$\pi = 2\,i \log \frac{1-i}{1+i},$$

en la que es $i = \sqrt{-1}$.

Haremos observar de paso que Viviani, de la Hire i Rolle no aceptaron el cálculo diferencial, por no encontrar exactos sus principios.

Alejo Claudio *Clairaut* (1713-1765) nació en Paris i fué un niño tan precoz como Pascal. Su padre, que era profesor de matemáticas, le enseñó las primeras letras en un libro de Euclides i a los cuatro años de edad ya podia leer los *Elementos* del matemático griego; a los nueve años leia la jeometría analítica i a los diez, la secciones cónicas de L'Hospital. En 1725, cuando solo tenia doce años, compuso una memoria sobre cuatro curvas jeométricas inventadas por él; i a los 16 años escribió su *Tratado sobre las curvas de dolbe curvatura*, que le abrieron las puertas de la Academia de Ciencias de Paris. En esta obra hace estensivas a las curvas del espacio algunas propiedades de las curvas planas.

En 1731 demostró una proposicion relativa a las curvas de Newton.

Formó parte de la espedicion encargada de medir en Laponia un arco de meridiano terrestre (1741) i a su regreso dió a luz su célebre *Teoría de la figura de la tierra* (1743); obra basada sobre una nota de Mac Laurin concerniente a la forma esferoidal que toma una masa flúida que jira alrededor de un eje que pasa por su centro de gravedad.

Clairaut encuentra para la gravedad el valor

$$g = G\left[1 + \left(\frac{5}{2}m - \epsilon\right)\text{sen}^2\,l\right],$$

en donde G es la gravedad en el ecuador, m la razon de la fuerza centrífuga a la gravedad en el mismo punto i ϵ la escentricidad de un meridiano. A este mismo resultado llegó Stokes, en 1849, agregando una nueva condicion. Admirado del precioso ausiliar que es la jeometría, como lo demostraban los escritos de Newton i el tratado de las fluxiones de Mac Laurin, Clairaut abandonó el análisis e inspirándose en los métodos jeométricos, compuso la *Teoría de la Luna* (1752), cuyos fundamentos los hallara en los Principios. La esplicacion que avanza sobre el movimiento de los ápsides, la dejó concluida llevando a una mayor aproximacion los cálculos efectuados por sus predecesores. Dos años despues publicó las *Tablas de la Luna*.

Estudió igualmente las perturbaciones de los cuerpos planetarios i en especial la del cometa de Halley, cuya reaparicion calculó para 1759. Los testos de jeometría (1741) i de áljebra (1746) merecen ser mencionados entre sus obras principales.

Empero, su intelijencia tan bien dotada se perdió en medio de los placeres mundanos a que se entregó con exceso, pretendiendo unir la tranquilidad que proporciona el estudio con el desórden de una vida disipada.

Juan le Rond *D'Alembert* (1717-1783) nació en Paris i era hijo natural del jeneral Destouches i de Madama Tencin, hermana del cardenal i arzobispo de Lyon. Fué abandonado por su madre en el pórtico de la iglesia de Nuestra Señora de Paris, recojido por el comisario del barrio i entregado a la mujer de un vidriero llamado Alembert.

Parece que su padre jamas lo perdió de vista, cuidó de su educacion i al morir le dejó una renta de 1200 libras.

A los diez años D'Alembert sabia todo lo que le pudo enseñar su maestro; dos años despues entraba en el colejio de las Cuatro Naciones, fundado por Mazarino i dirijido por los jansenistas. Habiendo compuesto un trabajo brillante que versaba sobre una de las epístolas de San Pablo, sus directores creyeron ver en este alumno tan aventajado un nuevo Pascal, por cuyo motivo lo iniciaron en el estudio de las ciencias exactas; a fin de que adquiriera mayor solidez en el raciocinio i prepararlo, de este modo, para que defendiera sus intereses. Mas, arrastrado D'Alembert por las sencillas verdades de estas ciencias, abandonó sus demas estudios para entregarse por completo a ellas.

A los 18 años se recibió de bachiller en artes i a los 22 era nombrado miembro de la Academia de Ciencias, en atencion a sus estudios de cálculo integral (1739) i a una memoria sobre la refraccion de los sólidos (1741). En su *Tratado de Dinámica* (1743) se establece el principio de su nombre: las fuerzas internas de inercia deben ser iguales i opuestas a las que producen la aceleracion, principio que podia deducirse de la tercera lei de Newton sobre el movimiento. La aplicacion de este principio permite obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento de cualquier sistema rijido; i así lo hizo en su *Tratado del equilibrio i del movimiento de los flúidos* (1744) i en la *Teoría jeneral de los vientos* (1745), llegando a establecer derivadas parciales que no supo integrar.

Este es el oríjen de la teoría tan fecunda de las ecuaciones de las derivadas parciales.

Protejido por Federico el Grande, a quien le dedicó la segunda edicion de la teoría de los vientos, no quiso aceptar, sin embargo, la invitacion que le hizo de establecerse en Berlin.

En tres trabajos que hizo por aquel tiempo, el análisis lo condujo a la ecuacion

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$$

i encontró que se satisfacia con la relacion

$$u = F(x+t) + f(x-t),$$

siendo F i f dos funciones arbitrarias.

Ocupóse, ademas, en cuestiones astronómicas relativas a la precesion de los equinoxios i a las variaciones de la oblicuidad de la eclíptica.

Los escritos científicos de D'Alembert son de un gran mérito i demuestran que fué uno de los mas grandes matemáticos de su tiempo.

En los últimos años de su vida se unió con Diderot i dió a la estampa la *Enciclopedia.*

D'Alembert es el autor de la introduccion i de numerosos artículos, siendo los mejores los que se refieren a la jeometría.

Era amigo íntimo de Voltaire, Condorcet i de los enciclopedistas que prepararon con sus ideas i sus escritos la Revolucion Francesa.

Daniel *Bernouilli* (1700-1782) nació en Basilea, fué amigo de Euler i principió por ser profesor de historia natural; en 1724 se trasladó a San Petersburgo, donde ocupó la cátedra de matemáticas; i en 1733 regresó a su ciudad natal para profesar sucesivamente la medicina, la filosofía i la historia natural.

En su primera obra matemática *Exertitationes* (1724) dá una solucion de la ecuacion diferencial de Riccati; i, dos años despues, hace ver las ventajas que tiene la trasformacion de un movimiento compuesto en movimiento de traslacion i rotacion.

Su obra principal es la *Hidrodinámica* (1738); está fundada en el principio de la conservacion de la enerjia i contiene el conocido teorema que lleva su nombre. Una memoria que compuso sobre la teoría de las mareas, fué premiada por la Academia de Ciencias de Paris.

Escribió, ademas, sobre las cuerdas vibrantes i la teoría cinética de los gases.

MATEMÁTICOS INGLESES DEL SIGLO XVIII

La notacion de las fluxiones de Newton, como era natural, fué aceptada por los matemáticos ingleses, ensre los cuales descuellan Daniel Grégory, Halley, Ditton, Taylor, Cotes, de Moivre, Mac Laurin i Simpson.

David *Grégory* (1661-1708), natural de Aberdeen i sobrino de Jacobo Grégory, fué primeramente profesor en Edimburgo i despues, por recomendaciones de Newton, en Oxford. Dió a luz un testo de jeometría (1684); otro de óptica (1695), en que considera posible la formacion de un sistema acromático de lentes; i un estudio relativo a la astronomía newtoniana.

Edmundo *Halley* (1656-1742), nació en Lóndres, hizo sus estudios en Oxford, sucedió a Wallis en la cátedra Savilian (1703), fué nombrado astrónomo real junto con Flamsteed (1720) i corrió con los gastos de la publicacion de los *Principios* de Newton.

Sus obras principales versan sobre astronomía; reconstituyó el 8.º libro perdido de Apolonio i editó la obra completa (1710); igualmente editó las obras de Sereno, Menelao i otras producciones de Apolonio. El cometa de Halley es famoso en la historia de la astronomía, porque fué el primer cometa periódico conocido. Inspirado en las ideas de Newton, Halley calculó los elementos del cometa de 1682 i observó que correspondian con los de otros cometas aparecidos en épocas anteriores, con intervalos de 76 años. Dedujo que todos estos astros errantes no eran distintos sino el mismo que él observara; i sostuvo que su aparicion se verificaria en 1759, como asi sucedió. Despues ha vuelto a aparecer en 1835 i 1910.

Jacobo *Bradley* (1692 1762), sucedió a Halley en su puesto de astrónomo de Greenwich; i es notable por haber esplicado la aberracion de la luz (1729) i por haber descubierto la causa de la nutacion (1748). Sus observaciones son de una exactitud sorprendente i contribuyó a metodizar el arte de las observaciones astronómicas.

Humphry *Ditton* (1675-1715), publicó un tratado clásico sobre las fluxiones (1706), otro de áljebra (1712) i uno de perspectiva (1712); dió una esplicacion matemática de la capilaridad e imajinó un método para determinar la lonjitud jeográfica de un lugar.

Brook *Taylor* (1685-1731), nació en Edmonton, estudió en Cambridge i fué uno de los admiradores mas entusiastas de Newton.

Desde 1712 principiaron a aparecer en las *Philosophical transactions* sus memorias que tratan del movimiento de los proyectiles, del centro de oscilacion i de la capilaridad. En 1715 dió a luz su obra *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* que da a conocer el famoso teorema que lleva su nombre:

$$f\,(x+h) = f\,x + \frac{h}{1!} f'x + \frac{h^2}{2!} f''x + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n\,x + \ldots$$

i que sirve para desarrollar en série las funciones; pero no estudió su converjencia i la demostracion que da descansa sobre numerosas hipótesis. Es el primer matemático que estudiara el cambio de la variable independiente i la representacion simbólica del desarrollo. Designa la enésima derivada de una funcion por y_n; la integral por y_{-1}, por ser la inversa analítica de la diferencial; i es el creador de las diferencias finitas. En las aplicaciones que hizo, examina la teoría de las vibraciones trasversales de las cuerdas i encuentra que el número de las semi-vibraciones por segundo es

$$n = \pi \sqrt{\frac{D.P}{L\,N}},$$

siendo D el largo del péndulo de segundos, P el peso tensor, L la lonjitud de la cuerda i N su peso; determina por primera vez la ecuacion diferencial de la trayectoria seguida por un rayo luminoso que atraviesa un medio hetereojéneo como la atmósfera; i, suponiendo que la densidad del aire varia con la distancia a la superficie terrestre, por medio de cuadraturas determina aproximadamente la forma de la curva; estudia igualmente la catenaria i los centros de oscilacion i percusion.

En 1719 publicó una perspectiva, en que habla de los puntos de fuga, mencionados anteriormente por Guido Ubaldi (1600) Stevin i Desargues.

Este mismo año se retiró de su cargo de secretario de la Sociedad Real i abandonó el estudio de las matemáticas.

Rojerio *Cotes* (1682-1716), oriundo de Leicester, despues de haber estudiado en Cambridge, desempeñó en esta Universidad la cátedra de astronomía (1706). De 1709 a 1713 preparó la segunda edicion de los Principios, cuyo autor tenia de Cotes una opinion mui elevada. Despues de su muerte, vieron la luz pública sus obras *Harmonia Mensurarum*, *Opera Miscellanea* (1722) i la *Hidrostática* (1738). En la primera descompone e integra espresiones racionales aljebraicas; dá a conocer su teorema de trigonometría fundado en los factores cuadrados de $x^n - 1$. El título de su libro fué sujerido por la proposicion siguiente: si por O se traza una recta que corta a una curva en Q_1, Q_2, Q_3, ... i se fija sobre esta línea el punto P, de modo que sea OP el medio aritmético de las inversas de OQ_1, OQ_2, OQ_3, ..., el lugar de P es una recta.

En la segunda obra se halla el primer ensayo de una teoría de las curvas; examina el método fluxional de Newton; construye tablas por el método de las diferencias i trata de las caidas de los cuerpos, del péndulo cicloidal i de los proyectiles.

Abraham *de Moivre* (1667-1751), nació en Vitry, Francia, i completó sus estudios en Inglaterra, donde se refujiaron sus padres, despues de la revocacion del edicto de Nantes. Parece que su gusto por las matemáticas se despertó con la lectura de los *Principios* de Newton, a quien conoció en casa del conde de Devonshire. Para poder penetrar el sentido de obra tan profunda, llevaba siempre consigo una o dos pájinas, arrancadas de un ejemplar de dicha obra. Vióse reducido a la pobreza i daba lecciones de matemáticas a particulares i consultas públicas en un café. Su constancia i el buen uso que hizo de su talento, lo elevaron gradualmente hasta llegar a ser amigo íntimo de Newton i miembro de la Sociedad Real de Lóndres i de la Academia de Ciencias de Paris.

El binomio conocido por su nombre se espresa así:

$$(\text{sen } x + i \cos x)^n = \text{sen } n x + i \cos n x.$$

Encontró los factores cuadrados de

$$x^{2n} - 2 p x^n + 1;$$

i con Lambert, creó la parte de la trigonometría que se relaciona con las imajinarias.

Ademas de los numerosos trabajos que insertó en las *Philosophical transactions*, cabe mencionar sus libros *The Doctrine of Chances* (1718) i *Miscellanea Analytica* (1730). En la primera introduce la teoría de las séries recurrentes i el cálculo de la probabilidad de un acontecimiento compuesto.

Colin *Mac Laurin* (1698-1746), nació en Kilmodan, Escocia, i se educó en Glasgow. Fué un niño precoz, pues a los 12 años aprendió solo los *Elementos* de Euclides i a los 16, principió a componer un testo de jeometría. Fué admitido, cuando cumplió 19 años, como profesor de matemática en Aberdeen i en 1725 desempeñó la cátedra correspondiente en la Universidad de Edimburgo, ocupada anteriormente por Jacobo Grégory.

En una visita que hizo a Lóndres, trabó relaciones con Halley, Clarke, Sir Isaac Newton i otros sabios eminentes.

Murió a causa de las fatigas i penurias que tuvo que soportar en la guerra civil de 1745, levantada por el pretendiente Cárlos Eduardo, nieto de Jacobo II.

Su *Jeometría Orgánica* (1720) trata, en la seccion I, de las cónicas; en la II, de las cúbicas; en la III, de las cúbicas i cuárticas; i en la IV, de las propiedades jenerales de las curvas. Discute el teorema jeneral relativo a una proposicion de Newton sobre las intersecciones de los lados de dos ángulos que jiran alrededor de sus vértices, intersecciones que determinan una cónica u otras curvas, segun la posicion de aquellos; discute igualmente las podarias, rama de la jeometría que creó en 1718. En la segunda parte de esta obra se lee la demostracion de un teorema de Cotes i de un teorema análogo suyo, que son jeneralizaciones de una proposicion de Newton. Aplica estos teoremas a las cónicas i cúbicas; indica las propiedades harmónicas del cuadrilátero inscrito en una cónica i deduce la proposicion conocida con el nombre de teorema de Pascal, publicado solamente en 1799.

Demuestra del mismo modo que si las intersecciones de los lados del cuadrilátero inscrito en una cúbica se encuentran en la curva, las tanjentes a los vértices opuestos del cuadrilátero se cortan sobre la misma.

Examina diversas proposiciones tocantes a las fuerzas centrales i describe algunas curvas que pasan por puntos dados.

El *Tratado de las Fluxiones*, que publicó en 1742, es la primera esposicion lójica i sistemática del método de las fluxiones de Newton.

En el artículo 751, lib. II, cap. II, páj. 610, demuestra su célebre fórmula como sigue: Supongamos que una funcion se puede desarrollar en série, i sea

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Px^n + \dots ;$$

derivemos sucesivamente:

$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots + nPx^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2!\,C + 3!\,Dx + \dots + n(n-1)Px^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 3!\,D + \dots + n(n-1)(n-2)Px^{n-3} + \dots$$

. . . .

hacemos ahora $x = 0$; se obtiene el valor de los coeficientes indeterminados A, B, C, ... P, ... , i sustituyendo en la funcion primitiva, se llega a la fórmula de Mac Laurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{2!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots$$

Creemos inútil agregar que Mac Laurin emplea las fluxiones én esta determinacion.

El desarrollo anterior lo escribe así:

$$y = E + \frac{\dot{E}\,z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}\,z^2}{1 \times 2\,\dot{z}^2} + \frac{\dddot{E}\,z^3}{1 \times 2 \times 3\,\dddot{z}^3} + \dots$$

Jacobo Stirling habia encontrado en 1730 esta fórmula que, como es sabido, se deduce fácilmente del teorema de Taylor.

Mac Laurin enuncia ademas la importante proposicion siguiente: Si f (x) es positiva i decrece cuando x crece de *a* a ∞, la série encontró con fuerzas para resolver diversas cuestiones propuestas de cálculo diferencial.

En 1743 fué nombrado profesor de matemáticas en Woolwich, puesto que desempezó hasta el fin de sus dias.

A la vez que trabajador infatigable, Simpson se reveló hombre eminente. Su obra *Fluxiones* (1737-1750) encierra un gran número de aplicaciones físicas i astronómicas; en sus *Dissertationis* (1743) discute la forma de la tierra, la fuerza de atraccion en la superficie de un esferoide, la teoría de las mareas i la refraccion atmosférica. Tambien dió a luz testos de áljebra (1745), de jeometría (1747) i de trigonometría (1748). Es el autor de la fórmula conocida para construir las tablas trigonométricas de arcos sucesivos i que se deduce de sen (a + b) o de cos (a + b). En sus *Miscellaneous tracts* (1754) se insertan cuestiones de astronomía, problemas sobre las fluxiones, el áljebra, los isoperímetros i discusiones del testo de los *Principios* de Newton. Obtuvo una ecuacion diferencial del movimiento de los ápsides de la órbita lunar, la que resuelve mediante los coeficientes indeterminados.

CAPITULO XVIII

LAGRANGE

(1740-1830)

El cálculo infinitesimal dividió las ciencias matemáticas en dos escuelas, la continental o leibniziana, i la inglesa o newtoniana. Despues de Tomas Simpson, esta última no tuvo ningun representante digno de mencion, ni realizó progreso alguno, a causa del carácter jeométrico de sus métodos i del empleo esclusivo de las fluxiones. En 1820, con la adopcion que se hizo del método de Leibniz, la escuela inglesa participó del movimiento universal de perfeccionamiento de las ciencias exactas, i contribuyó así eficazmente a su mayor estension i profundidad.

La escuela Leibniziana, por el contrario, desde sus primeros pasos i mediante la ayuda poderosa de los Bernouilli, tomó un vuelo tan sorprendente como inesperado. La admirable notacion inventada por Leibniz se adaptaba con iguales ventajas a la teoria matemática i a sus aplicaciones. Sin embargo, la mecánica, despues de los trabajos de Newton, no realizó ningun adelanto, hasta que D'Alembert estendió sus límites con ayuda del portentoso cálculo de los infinitesimales. La gravitacion universal, espuesta en *Los Principios*, estaba aceptada por todos; mas, los métodos jeométricos empleados en las demostraciones eran largos i difíciles: Mac Laurin, Simpson i Clairaut, fueron los últimos en hacer uso de ellos. Por fin, la teoria de la emision de la luz era admitida conforme a las ideas de Newton.

En el período en que vamos a entrar, figuran, en primera línea, Euler, Laplace, Lagrange i Legendre.

Euler estudió, completó i resumió la obra de sus predecesores; Lagrange, con un talento sin igual, desarrolló el cálculo infinitesimal i la mecánica racional hasta darles la forma que aun conservan; Laplace estendió aun mas el campo del cálculo infinitesimal i lo aplicó a la teoria de la gravitacion; creó ademas el cálculo de las probabilidades; Legendre, en fin, creó igualmente la teoria de las esféricas armónicas, las integrales elípticas, i completó la teoria de los números. Las obras de todos estos jeómetras eminentes son clásicas, i en ellas encuentran, aun los sabios de nuestros dias, materia para una ilustracion mas profunda.

Lagrange, Laplace i Legendre fundaron una escuela francesa que podemos dividir en dos ramas: La analítica, que comprende a Poisson i Fourier, aplicó el cálculo infinitesimal a la Física; i la jeométrica, que cuenta a Monge, Carnot i Poncelet, creó la Jeometría moderna.

Los trabajos importantes de Gauss i Abel, contemporáneos de los anteriores, se darán a conocer en el capítulo siguiente.

DESARROLLO DE LA MECÁNICA I EL ANÁLISIS

Leonardo *Euler* nació en Basilea, Suiza, el 15 de Abril de 1707, i murió en San Petersburgo el 7 de Noviembre de 1783.

Era hijo de un ministro luterano, hizo sus estudios en su ciudad natal, bajo la direccion de Juan Bernouilli, i se ligó a Daniel i Nicolás, hijos de su maestro, con una amistad que duró toda su vida. Acompañólos a Rusia (1725), donde ocupó la cátedra de Matemáticas (1733); el rigor del clima fué causa de que perdiera un ojo (1735); invitado por Federico el Grande, trasladóse a Berlin (1741), donde residió veinticinco años, i fué reemplazado por Lagrange (1766). Regresó a Rusia, i dos años despues perdió completamente la vista (1768); en 1771 desaparecieron en un incendio todos sus trabajos manuscritos, los que rehizo i perfeccionó. Murió de un ataque de apóplejia a los 75 años de edad. A Euler le debe el Análisis Matemático innumerables creaciones, completó casi todas las ramas de las Matemáticas puras en sus detalles i demostraciones i las dispuso en órden. Es mui importante para las ciencias exactas que un talento como el de Euler se halla ocupado en esta obra fundamental i ordenada.

Sin mencionar el número inmenso de memorias que publicó, analizaremos sus principales obras.

La *Introduccion al Análisis Infinitesimal* (1748) comprende dos partes. La primera contiene el Aljebra, la Teoria de las ecuaciones i la Trigonometría. En el Aljebra trata del desarrollo de las funciones en series i de la suma de series dadas, demostrando que no se puede operar con las que no son converjentes. En la segunda, inspirada por la obra de Mayer, titulada Aritmética de las líneas (1727), desarrolla la idea de Juan Bernouilli, de que la Trigonometría es una rama del Análisis i no un apéndice de la Jeometría o de la Astronomía; emplea juntamente con Simpson el algoritmo trigonométrico, i demuestra que las funciones trigonométricas i la funcion esponencial estan ligadas por la relacion.

$$\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$$

que se deduce de la serie esponencial, i en la cual es

$$e = 2,7\ 18281\ 828\ \ldots$$

es la base de los logaritmos naturales o de Napier; Cotes designaba este número por M. i Euler por *e* (1731). En la misma obra Euler denota la razon de la circunferencia al diámetro por $\pi = 3,\ 141\ 592\ldots$ Esta notacion se encuentra en Outghtred (1647), Barrow, W. Jones (1706) i Goldbach (1742). Juan Bernouilli empleaba la letra c; i el mismo Euler, la letra p, inicial de *perímetro* o *periferia.*

La segunda parte del *Análisis Infinitesimal*, trata de la Jeometría Analítica i en él comienza por clasificar las curvas en aljebraicas i trascendentes, i enunciar sus propiedades jenerales. Aplica estas propiedades a la ecuacion jeneral de 2.º grado con dos variables i demuestra que representa las tres secciones cónicas, elipse, parábola e hipérbola. Ocúpase ademas en dar a conocer las curvas de tercero, de cuarto i de otros grados. Pasa en seguida a las superficies representadas por la ecuacion jeneral de 2.º grado con 3 variables, algunas de las cuales no eran conocidas hasta entónces. Establece las fórmulas para la trasformacion de las coordenadas en el espacio, trata de introducir la curvatura de las superficies i da la primera discusion de las líneas de doble curvatura.

La *Intitutionis Calculi Differentialis* (1755) es la primera obra clásica completa que trata de tales conocimientos i ha servido de modelo de varios testos modernos.

La *Intitutionis Calculi Integralis* (1768-1770) resume todo lo que se sabia del Cálculo Integral en su tiempo, i completa muchos teoremas; introduce las funciones Beta i Gamma que emplea en la reduccion i trasformacion de las integrales. La esposicion que hace de las integrales elípticas es superficial i le fué sujerida por una relacion de los arcos hiperbólicos i elípticos publicados por Juan Landen en las *Philosophical Transactions* (1775).

Fundó el *Cálculo de las variaciones* (1744), que mas tarde debia completar Lagrange, con motivo de los problemas de los isoperimétricos, de la braquistócrona de un medio resistente i de las líneas jeodésicas que habia propuesto su maestro Juan Bernouilli. Los elementos de Aljebra (1770) fueron traducidos al frances con adiciones de Lagrange (1794).

El primer volúmen comprende el Aljebra ordinaria; i en él establece sobre bases racionales las operaciones fundamentales i demuestra el teorema jeneral del binomio de Newton, aunque no estudia su converjencia. El segundo volúmen está consagrado al análisis indeterminado o Aljebra de Diofanto i contiene las soluciones de algunas cuestiones propuestas por Fermat. Como ejemplo de la sencillez i rigor de las demostraciones de Euler, damos la siguiente: El teorema 36, libro IX, dice así: todos los números perfectos pares estan comprendidos en $2^{n-1}p$, siendo p un número primo de la forma $2^n - 1$. Un número perfecto es igual a la suma de todos sus factores. Sea N un número perfecto par que puede designarse por $2^{n-1}a$, siendo *a* impar. Como N es perfecto, divide la suma de todos sus divisores; i tendremos $2N=\Sigma N$; por tanto:

$$2.\ 2^{n-1}\ \alpha=\Sigma\ 2^{n-1}\ \alpha=\Sigma\ 2^{n-1}\ \Sigma\ \alpha$$

i

$$2^n\ \alpha=(1+2+\ldots+2^{n-1})\Sigma\alpha - 2^{n-1}\Sigma\alpha;$$

luego

$$\frac{\alpha}{\Sigma\alpha}=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{p}{p+1}$$

Ademas, $\alpha=\gamma p$, $\Sigma\ \alpha=\gamma\ (p-1)$ i siendo $\frac{p}{p \cdot 1}$ irreductible, tiene que ser entero i positivo. Los factores de γp son 1, γ, p i γp; luego $\Sigma\ \gamma p=1+\gamma+p+\ldots=(-1)\ (p\cdot 1)$, relaccion que está en contradiccion con $\Sigma\gamma p=\Sigma\alpha=\gamma\ (p+1)$; en consecuencia, $\gamma=1$ i p es primo; por último, $\alpha=p$ i $N=2^{n-1}\alpha=2^{n-1}(2^n \pm 1)$.

Se deduce de lo anterior que, por ser p primo, n tambien lo es i para determinar los valores de $n<257$ que hacen a p primo, se acude a la regla de Mersenne.

Las cuatros obras anteriores encierran la mayor parte de los estudios que hizo Euler sobre las Matemáticas puras. Entre sus numerosos trabajos de aplicacion encontramos las siguientes novedades: En la Mecánica aplicada a un sistema rijido, determina las ecuaciones jenerales del movimiento de un cuerpo alrededor de un punto fijo,

$$A\ \frac{d\,p}{d\,t}+(C-B)\ q\ r=L$$

i defiende el principio de *menor accion* de Maupertuis. En hidrodinámica estableció la ecuacion jeneral del movimiento:

$$\frac{1}{r}=\frac{d\,p}{d\,x}=x\ \frac{d\,u}{d\,t}-u\ \frac{d\,u}{d\,x}\ldots-v\frac{d\,v}{d\,\gamma}-u\ \frac{d\,u}{d\,z}$$

Sus obras mas importantes de Astronomia son: *Theoría Motuum Planetarum et Cometarum* (1744), *Theoria Motus Lunaris* (1753) y *Theoria Motuum Lunae* (1772).

Entra en el problema de los tres cuerpos suponiendo que el cuerpo estudiado arrastra en su movimiento tres ejes rectangulares que se desplazan paralelamente a si mismos; i refiere los movimientos a estos ejes. Este procedimiento no es ventajoso. Sin embargo, Mayer lo empleó, construyó sus tablas lunares i obtuvo del Parlamento un premio de 5000 libras. Los servicios de Euler fueron tambien recompensados con una suma de 300 libras.

En su *Dióptrica* (1770-1771) se inclina por la teoria de las ondulaciones en vez de la emision. Sus *cartas a una princesa de Alemania* (1768-1772), que aun gozan de una gran fama, es una obra elemental de Física i de Filosofia Matemática i en sus pájinas se declara adversario de las ideas filosóficas de Leibniz. Entre los contemporáneos de Euler, que hicieron progresar las Ciencias Exactas, figuran Daniel Bernouilli, Lambert, Bézout, Trembley i Arbogasto

Juan Enrique Lambert: (1728-1777) nació en Mulhouse (Alemania), era hijo de un pobre sastre i no pudo contar mas que con sus propios recursos para instruirse.

Principió como empleado de un diario, despues pasó a ser preceptor en una casa acomodada, donde tenia a su disposicion una buena biblioteca. En 1763 fué nombrado redactor del Almanaque Astronómico prusiano.

Entre sus obras mas importantes se mencionan un tratado de óptica (1759) i otro de perspectiva; una obra sobre los cometas (1761), en que da el area del sector focal de una cónica en funcion de una cuerda i de los radios focales de sus estremos. En una de sus memorias, dirijida a la Academia de Berlin, demuestra que π es inconmensurable (1768), demostracion que apareció despues en la Jeometría de Legendre. En otra memoria sobre la Trigonometría (1768) estíende los teoremas de Moivre sobre las variables complejas e introduce el seno i coseno hiperbólicos, Shx, Chx, atribuidos ademas a F. C. Mayer.

En 1771 publicó un ensayo en que por primera vez se forman las ecuaciones funcionales que espresan los datos por medio de la notacion diferencial; en 1783 apareció una nota sobre la fuerza viva en que tambien por primera vez se espresa, valiéndose de la misma notacion, la segunda lei de Newton sobre el movimiento.

Esteban Bézout: (1730 1783) natural de Nemours, compuso una *Teoría Jeneral de las ecuaciones aljebraicas*, que contiene ideas nuevas sobre la eliminacion i las funciones simétricas. Empleó ademas los determinantes, i es el autor del método de eliminacion que lleva su nombre.

Juan Trembley: (1749-1811) nació en Jinebra, estudió las ecuaciones diferenciales, las diferencias finitas i las probabilidades.

Luis Francisco Antonio Arbogasto: (1759-1808) de orijen alsaciano, perfeccionó la teoría de las series i es el creador del cálculo de las derivaciones.

José Luis Lagrange: El mas famoso matemático del siglo XVIII, nació en Turin el 25 de Enero de 1736, i murió en Paris el 10 de Abril de 1813.

Su familia era de orijen frances i estaba emparentada con los descendientes de Descartes. Su padre ocupaba el cargo de tesorero del ejército sardo i poseia una gran fortuna; mas, habiéndola perdido, el joven Lagrange tuvo que acudir a sus propios recursos para crearse una posicion. Hizo sus estudios en Turin, i a los diecisiete años se despertó su gusto por las Matemáticas, leyendo las memorias de Halley sobre la superioridad del Aljebra en los problemas de Optica. Entónces Lagrange se dedicó a estudiar solo esta ciencia, i al cabo de un año fué nombrado profesor del ramo en la escuela de artilleria.

Su primer trabajo fué una carta dirijida a Euler, en la que resolvia de un modo completo el problema de los isoperímetros, solucion que Euler consideró tan acabada i jeneral que retiró de la publicacion una memoria por él escrita que trataba de igual cuestion. Para llegar a la solucion, Lagrange tuvo que crear el cálculo de las variaciones. En 1758, Lagrange fundó una sociedad de amigos, que fué el oríjen de la Academia de Ciencias de Turin, cuyas actas, tituladas *Miscellanea Taurinensia*, contienen un gran número de memorias de Lagrange, en una de las cuales estudia la propagacion del sonido, señalando un error en que incurrió Newton i obtiene la ecuacion diferencial jeneral del movimiento i hace su integracion para el movimiento rectilíneo. Resuelve ademas el problema de las vibraciones trasversales de las cuerdas i encuentra que la ecuacion de la curva en un instante t es

$$y = a \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nt;$$

discute el eco, el ruido i el sonido compuesto. En otros articulos estudia las series recurrentes, las probabilidades i el cálculo de las variaciones, que aplica a la dinámica; resuelve un problema de Fermat i las ecuaciones diferenciales jenerales del movimiento de tres cuerpos que se desplazan en virtud de sus mutuas atracciones.

Ocupaba Legrange, en 1761, el primer lugar entre los mas hábiles matemáticos; empero, el excesivo trabajo a que se entregara durante nueve años para alcanzar tan alto puesto, quebrantó su salud, i se le declaró una neurastenia de la que jamas pudo curarse.

A pesar de los consejos de los médicos, que no respondian del buen equilibrio de sus estraordinarias facultades intelectuales si seguia en sus estudios predilectos, compuso una obra sobre la libracuon de la luna i esplicó la causa de que nos presentara siempre la misma faz, lo que consiguió valiéndose del principio del trabajo virtual i que contiene en jérmen la idea de las ecuaciones jenerales del movimiento.

Emprendió un viaje a Lóndres, pero cayó enfermo en Paris donde fué recibido con toda clase de honores. De regreso a Turin, fué llamado por Federico el Grande (1766) para que ocupara el puesto de Euler, manifestándole que «el mas grande de los reyes debia tener en su corte al mas grande de los matemáticos». Veinte años residió en Berlin; compuso innumerables memorias que se publicaron en las Actas de la Academia de esta ciudad i redactó su obra monumental titulada *Mecánica Analítica*. En Berlin, viendo que todos sus colegas eran casados, resolvió seguir su ejemplo; desgraciadamente la esposa que elijió no correspondia a hombre tan eminente, i lo hizo desgraciado.

Lagrange se atrajo la consideracion i los favores del gran rei. En las conversaciones que con él mantenia, tan augusta persona le recomendó una vida arreglada i sus ventajas. Desde entónces Lagrange estudió su cuerpo i su espíritu como si se tratara de una máquina i determinó la suma de trabajo que podia producir sin agotarse. Todas las noches se trazaba la tarea del dia siguiente i, despues de haberla concluido, hacia un estracto de la materia desarrollada con el objeto de conocer los puntos débiles que necesitaban de un retoque o un refuerzo en la demostracion. Antes de comenzar la redaccion, concebia en su mente el asunto de que queria tratar i en seguida lo escribia de un golpe, sin ninguna enmendatura o correccion.

Sorpresa i admiracion causa la actividad que desplegó durante estos veinte años de labor científica. A la vez que produjo su prodijiosa Mecánica Analítica proporcionó a las Academias de Berlin, Paris i Turin, ciento dos memorias, todas de un estimado valor i muchas de ellas son verdaderos tratados que versan sobre variadas materias. En los volúmenes de los años 1766 a 1785 de las *Miscellanea Taurinensia*, se insertan los artículos en que habla del número de observaciones astronómicas que es necesario hacer para obtener el resultado mas probable; de la presion ejercida por los fluidos en movimiento i de la integracion por medio de las series. En las memorias de la Academia de Paris, se notan sus investigaciones acerca de la desigualdad de los satélites de Júpiter (1766), un ensayo sobre el problema de los tres cuerpos (1776), un trabajo relativo a la ecuacion secular de la luna (1776) i un tratado sobre la perturbacion de los cometas, producciones todas que fueron propuestas por la misma corporacion i premiadas con las recompensas prometidas.

En las memorias de la Academia de Berlin se encuentra la discusion de la solucion en números enteros de las ecuaciones indeterminadas de 2o. grado (1769), un tratado referente a la eliminacion (1770), memorias concernientes a un procedimiento jeneral de resolucion de las ecuaciones aljebraicas de cualquier grado i de las ecuaciones binomias (1700 1), la esposicion de los determinantes del segundo i tercer órdenes i de los invariantes (1773). En la *Teoría de los Números* demostró que todo número entero que no es cuadrado perfecto puede ser descompuesto en dos, tres o cuatro cuadrados enteros (1770); que si n es primo, 1.2.3 .... (n-1) +1 es múltiplo de n (1771), proposicion conocida hoi con el nombre de teorema de Wilson; demostró ademas diversos teoromas de Fermat (1773 1777) i dió a conocer los divisores de x^2+ay^2. En Jeometría Analítica, redujo las ecuaciones de las cuádricas a sus formas canónicas (1772-1793). Creó las ecuaciones diferenciales parciales (1772 1785) sin que hasta hoi dia, nadie lo haya sobrepasado en tan importante materia.

En Astronomía podemos mencionar la memoria sobre la atraccion de los elipsoides (1773), fundada sobre un trabajo de Mac Laurin, en la que trata de la ecuacion secular de la luna; introduce la idea de potencial de un cuerpo, que es, en un punto cualquiera, la suma de las masas de cada elemento dividida por su distancia a dicho punto. Estudió los movimientos de los nodos de una órbita planetaria (1774), la estabilidad de estas órbitas (1776), la determinacion de una órbita cometaria por medio de tres observaciones (1778-1783) i de las variaciones seculares i periódicas de los elementos de los planetas (1781-1784), alcanzando a los límites estremos de estos conocimientos, como lo comprobó mas tarde Le Verrier; mencionemos ademas tres memorias relacionadas con la interpolacion i la parte relativa a las diferencias finitas, que han quedado en la forma en que las dejará tan insigne analista. Su gran tratado de *Mecánica*

Analítica, esta fundado en la lei del trabajo virtual, i de este principio i con ayuda del cálculo de las variaciones, deduce toda la mecánica de los sólidos i de los fluidos. Todo es majistral i brillante en esta produccion, considerada, con sobrado fundamento, como la obra maestra de Lagrange. Despues de demostrar que la Mecánica entera descansa en un principio sencillo, construye las fórmulas jenerales con las cuales puede obtener un resultado particular cualquiera.

D'Alembert i Euler, para llegar a un grado tan alto de jeneralizacion, consideraron el movimiento de cada partícula de un sistema material; mas, Lagrange hace ver que si es conocida la configuracion del sistema, por un número suficiente de variables igual al de los grados de independencia del sistema, sus enerjias cinéticas i potencial pueden espresarse en términos de dichas variables i obtenerse las ecuaciones diferenciales por una sencilla diferenciacion. Otro de sus teoremas establece que la enerjia cinética comunicada por impulsiones dadas a un sistema material sometido a ligazones dadas, es un máximo.

Por fin, establece igualmente el principio de la menor accion de Maupertuis. La elegancia con que presenta la parte analítica de su obra, le mereció de Sir Wiliam Hamilton el elojio de que era un poema científico. Interesa saber que Lagrange tenia la idea de que la Mecánica era una rama de las Matemáticas, comparable con la Jeometría de cuatro dimensiones, a saber, el tiempo i las tres coordenadas. Vanagloriábase de que su obra no contuviera ninguna figura jeométrica; i, aunque al principio no encontró ningun editor que se encargara de su publicacion, gracias a la mediacion de Legendre, una casa de Paris en 1788 se encargó por fin de publicarla. Despues de la muerte de Federico el Grande, en 1787, Lagrange aceptó el ofrecimiento que le hiciera Luis XVI de venir a establecerse en Paris, rechazando las invitaciones iguales de las cortes de España i Nápoles. Fué acojido por los franceses con toda clase de honores i se le dió un departamento especial en el Louvre para su alojamiento. A su llegada fué atacado de una neurastenia que durante dos años le impidió ocuparse en ningun trabajo de su predileccion. Ni aun pudo abrir su obra impresa de Mecánica Analítica, que habia sido el fruto de 25 años de trabajo. Tuvo interes por seguir las peripecias de la Revolucion Francesa; pero cuando vió el aspecto sanguinario que tomaba, fué acometido de un terror justificable en la naturaleza tímida i alma tranquila de este ilustre sabio.

(*Continuará*)