CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

Se averigua fácilmente que estas fórmulas conservan la misma forma cuando s no es variable independiente; se tiene, en este caso,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\xi}{r} &= \frac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{ds^3} \\ \frac{\eta}{r} &= \frac{dz\, d^2x - dx\, d^2z}{ds^3} \\ \frac{\zeta}{r} &= \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{ds^3} \end{aligned}\right.$$

Derivadas de los nueve cosenos, respecto del arco s

Las fórmulas (2) dan las derivadas de los cosenos α, β, γ.

Sean ahora, en la fig. (1), ξ_1, $\xi_1 + \Delta\xi_1$ las abscisas de los puntos P_1, P_2 i λ_2 el coseno del ángulo de $P_1\ P_2$ con OX; el arco $P_1\ P_2$ mide el ángulo $\Delta\phi$ de los planos osculadores en M i M', luego se tiene

$$\Delta\xi_1 = \lambda_2\ \Delta\phi$$

La figura (1) muestra ademas que, si $\Delta\phi$ es positivo el sentido de $P_1\ P_2$ es contrario al sentido de MN, luego el límite de λ_2 es $-\lambda$. Dividamos los dos miembros de la ecuacion anterior por ds, tendremos en el límite

$$\frac{d\xi}{ds} = -\lambda \lim \frac{\Delta\phi}{ds}$$

Sea ρ el radio de torsion, en el punto M; el segundo factor del segundo miembro es, por definicion, igual a $\frac{1}{\rho}$, luego se podrán escribir las fórmulas

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= -\frac{\lambda}{\rho} \\ \frac{d\eta}{ds} &= -\frac{\mu}{\rho} \\ \frac{d\zeta}{ds} &= -\frac{\nu}{\rho} \end{aligned} \right.$$

Estas son, por consiguiente, las derivadas de los cosenos ξ, η, ζ.

Para determinar las de λ, μ, ν escribiremos las fórmulas usuales

$$\begin{aligned} \lambda &= \eta\gamma - \zeta\beta & \qquad \alpha &= \mu\zeta - \nu\eta \\ \mu &= \zeta\alpha - \xi\gamma & \beta &= \eta\xi - \lambda\zeta \\ \nu &= \xi\beta - \eta\alpha & \gamma &= \lambda\eta - \mu\xi \end{aligned}$$

De la primera se deduce

$$\frac{d\lambda}{ds} = \eta\frac{d\gamma}{ds} - \zeta\frac{d\beta}{ds} + \gamma\frac{d\eta}{ds} - \beta\frac{d\zeta}{ds}$$

O bien, segun (2) i (4),

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\xi}{\rho}$$

Las otras dos derivadas se deducen de la primera por una simple permutacion i se tiene finalmente

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda}{ds} &= -\frac{\alpha}{r} + \frac{\xi}{\rho} \\ \frac{d\mu}{ds} &= -\frac{\beta}{r} + \frac{\eta}{\rho} \\ \frac{d\nu}{ds} &= -\frac{\gamma}{r} + \frac{\zeta}{\rho} \end{aligned} \right.$$

Derivadas consecutivas de las coordenadas de los puntos de la curva en funcion de la curvatura i de la torsion

Las fórmulas (1) i (2) dan las primeras i segundas derivadas de x, y, z respecto a S; calculemos las derivadas terceras; de la primera fórmula (2), se deduce

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{ds} - \frac{\lambda}{r^2}\frac{dr}{ds}$$

O bien, segun (5)

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\xi}{\rho r} - \frac{\lambda}{r^2}\frac{dr}{ds}$$

i, del mismo modo,

$$\frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{\beta}{r^2} + \frac{\eta}{\rho r} - \frac{\eta}{r^2}\frac{dr}{ds}$$

$$\frac{d^3z}{ds^3} = -\frac{\gamma}{r^2} + \frac{\zeta}{\rho r} - \frac{\nu}{r^2}\frac{dr}{ds}$$

Estas fórmulas son debidas a *Serret.*

Supongamos que los ejes de coordenadas coinciden con el triedro formado con la tanjente, la normal principal i la binormal, deberemos hacer en las fórmulas anteriores

$$\begin{array}{lll} \alpha = 1 & \lambda = 0 & \xi = 0 \\ \beta = 0 & \mu = 1 & \eta = 0 \\ \gamma = 0 & \nu = 0 & \zeta = 1 \end{array}$$

Las derivadas consecutivas de las coordenadas del punto M, situado en el oríjen, son entónces

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dx}{ds}=1 & \dfrac{d^2x}{ds^2}=0 & \dfrac{d^3x}{ds^3}=-\dfrac{1}{r^2} \\[2ex] \dfrac{dy}{ds}=0 & \dfrac{d^2y}{ds^2}=\dfrac{1}{r} & \dfrac{d^3y}{ds^3}=-\dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{dr}{ds} \\[2ex] \dfrac{dz}{ds}=0 & \dfrac{d^2z}{ds^2}=0 & \dfrac{d^3z}{ds^3}=\dfrac{1}{\rho r} \end{array}\right.$$

Coordenadas del punto M', infinitamente próximo de M

Hemos llamado mas arriba $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ las coordenadas de un punto M' infinitamente próximo de M; la fórmula de Taylor da ahora

$$\Delta x=\frac{dx}{ds}\,ds+\tfrac{1}{2}\,\frac{d^2x}{ds^2}\,ds^2+\frac{1}{1.2.3}\,\frac{d^3x}{ds^3}\,ds^3+\ldots..$$

i se obtendrian fórmulas análogas para Δy i Δz; reemplacemos las derivadas consecutivas por sus valores (6) tendremos

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta x=ds-\dfrac{1}{6r^2}\,ds^3+\ldots... \\[2ex] \Delta y=\dfrac{1}{2r}\,ds^2-\dfrac{1}{6r^2}\,\dfrac{dr}{ds}\,ds^3+\ldots... \\[2ex] \Delta z=\dfrac{1}{6\rho r}\,ds^3+\ldots... \end{array}\right.$$

La última fórmula muestra que la distancia Δz de M' al plano osculador en M es infinitamenta pequeña de tercer órden respecto del arco $M\,M'$, luego *cuando se desprecian los infinitamente pequeños de tercer órden se puede admitir que un arco de curva está contenido en su plano osculador.*

Otra espresion del radio de curvatura

De la segunda fórmula (7) se deduce

$$\frac{2\Delta y}{ds^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{3r^2}\,\frac{dr}{ds}\,ds + \ldots\ldots$$

Luego, cuando ds tiende hácia cero,

$$\lim \frac{2\Delta y}{ds^2} = \frac{1}{r}$$

En esta fórmula se puede reemplazar ds por Δx porque la diferencia entre Δx i ds es, segun (7) del órden de ds^3, luego se tiene tambien

$$(8) \qquad r = \lim \frac{\Delta x^2}{2\Delta y}$$

Esta fórmula puede establecerse directamente; consideremos en efecto la circunferencia osculatriz a la curva, ella pasa por tres puntos consecutivos i su radio es por consiguiente igual a r. Ahora en esta circunferencia se tiene

$$\Delta x^2 = \Delta y\ (2r - \Delta y)$$

O bien

$$\frac{\Delta x^2}{2\Delta y} = r - \frac{\Delta y}{2}$$

Luego

$$\lim \frac{\Delta x^2}{2\Delta y} = r$$

La fórmula (8), permite comparar fácilmente las curvaturas de las curvas que son tanjentes entre sí en un mismo punto; sea, en efecto M el punto de contacto comun, tomamos sobre la tanjente $M\,T$ un segmento $M\,H = \Delta x$ i tracemos por H un plano perpendicular a $M\,T$; sean M'_1, M'_2, M'_3..... los puntos de interseccion de las diferentes curvas con el plano considerado i Δy_1, Δy_2, Δy_3 ..... las distancias de estos puntos a la tanjente comun; r_1, r_2, r_3..... los radios de curvatura.

Cuando se desprecian los infinitamente pequeños de tercer órden se tiene

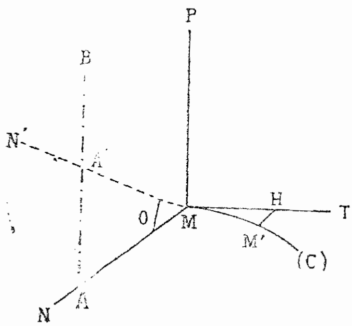
$$r_1 = \frac{\Delta x^2}{2\Delta y_1},\ r_2 = \frac{\Delta x^2}{2\Delta y_2},\ r_3 = \frac{\Delta x^2}{2\Delta y_3},\ \ldots\ldots$$

Luego

$$r_1 \Delta y_1 = r_2\, \Delta y_2 = r_3 \Delta y_3 = \ldots\ldots$$

Eje de curvatura

Llevemos sobre la normal principal MN a la curva (C) (fig. 2) una lonjitud $MA = r$, el punto A es el centro del círculo de curvatura, o simplemente el *centro de curvatura* de la curva (C); tracemos en seguida AB perpendicular al plano osculador: esta recta se llama *eje de curvatura* de la curva (C), en el punto M.



Consideremos ahora un plano TMA' i sea θ el ángulo que forma con el plano osculador; proyectemos la curva (C) en este plano i busquemos el radio de curvatura r' de esta proyeccion en el punto M; aplicaremos para esto la fórmula (8).

Tenemos, en primer lugar

$$r = \lim \frac{\overline{MH}^2}{2\,M'H}$$

Al proyectar la curva (C) sobre el plano TMA' el punto M. se proyectará en un punto M'_1 i se tendrá evidentemente

$$M'_1 H = M'H.\cos\theta$$

Luego

$$r' = \lim \frac{\overline{MH}^2}{2\,M'_1H} = \frac{1}{\cos\theta} \lim \frac{\overline{MH}^2}{2\,M'H}$$

Por consiguiente

$$r' = \frac{r}{\cos\theta}$$

La fig. (2) muestra que r' es igual a $M A'$; en otros términos, el centro de curvatura de la proyeccion se encuentra sobre el eje de curvatura $A B$.

El eje de curvatura es la interseccion de dos planos normales infinitamente próximos

En efecto, el plano normal a la curva (C) en M es el plano $P M N$ cuya ecuacion es $X = O$; ahora, en el punto M', los cosenos directores de la tanjente son, segun (7)

$$1, \ \frac{ds}{r}, \ 0$$

Luego la ecuacion del plano normal es

$$X - \Delta x + \frac{ds}{r} (Y - \Delta y) = o$$

O bien, si se desprecian los infinitamente pequeños de órden superior a ds,

$$X - ds + \frac{ds}{r} Y = 0$$

La interseccion de los dos planos es la recta

$$
\begin{aligned}
X &= 0 \\
Y &= r
\end{aligned}
$$

Es precisamente el eje de curvatura.

Diferencia entre un arco infinitamente pequeño i su cuerda

Sea Δc la lonjitud de la cuerda $M\,M'$ (fig. 1); se deduce de las fórmulas (7)

$$
\begin{aligned}
\Delta c^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 &= \left(ds^2 - \frac{1}{3r^2}\, ds^4 + \ldots\ldots \right) \\
&+ \left(\frac{1}{4r^2}\, ds^4 + \ldots\ldots \right) + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Los puntos suspensivos representan cantidades infinitamente pequeñas de órden superior a ds^4; se puede escribir tambien

$$
\Delta c^2 = ds^2 - \frac{1}{12}\,\frac{ds^4}{r^2} + \ldots\ldots = ds^2 \left(1 - \frac{1}{12}\,\frac{ds^2}{r^2} + \ldots\ldots \right)
$$

Luego

$$
\Delta c = ds \left(1 - \frac{1}{12}\,\frac{ds^2}{r^2} + \ldots\ldots \right)^{\frac{1}{2}} = ds \left(1 - \frac{1}{24}\,\frac{ds^2}{r^2} + \ldots\ldots \right)
$$

O bien

$$
\Delta c = ds - \frac{1}{24}\,\frac{ds^3}{r^2} + \ldots\ldots
$$

En resúmen, cuando se desprecian los infinitamente pequeños de órden superior a ds^3 la diferencia entre el arco ds i la cuerda Δc es igual a $\frac{ds^3}{24r^2}$.

Es fácil de averiguar directamente esta fórmula en el caso de la circunferencia; en efecto sea $d\epsilon$ el ángulo al centro del arco ds, se tiene

$$ds = rd\epsilon$$

$$\Delta c = 2r \operatorname{sen} \frac{d\epsilon}{2} = 2r\left[\frac{d\epsilon}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{d\epsilon}{2}\right)^3 + \dots\dots\right]$$

O bien

$$\Delta c = rd\epsilon - \frac{1}{24} rd\epsilon^3 + \dots\dots = ds - \frac{1}{24} \frac{ds^3}{r^2} + \dots\dots$$

Es la misma fórmula obtenida en el caso jeneral de una curva cualquiera.

Curvas planas

Las fórmulas relativas a las curvas planas pueden deducirse simplemente de las fórmulas jenerales, haciendo en ellas $z=0$; el plano de la curva es entónces el plano $X\,O\,Y$. Sin embargo es mas espedito establecerlas directamente.

Sea ω el ángulo de la tanjente a la curva con el eje OX, se tiene

$$\frac{dx}{ds} = \cos \omega$$

$$\frac{dy}{ds} = \operatorname{sen} \omega$$

Luego

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\operatorname{sen}\omega \frac{d\omega}{ds} = -\frac{\operatorname{sen}\omega}{r}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \cos\omega \frac{d\omega}{ds} = +\frac{\cos\omega}{r}.$$

De ahí se deduce

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

Se obtiene tambien

$$\frac{1}{r} = \cos\omega \frac{d^2y}{ds^2} - \operatorname{sen}\omega \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2}$$

Si s no es la variable independiente,

$$(9) \qquad \frac{1}{r} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Elijamos ahora x como variable independiente, d^2x será igual a cero; luego

$$\frac{1}{r} = \frac{dx\,d^2y}{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

O bien

$$(10) \qquad r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Se averigua que el radio de curvatura es igual al radio del círculo osculador.

La fórmula (9) se deduce tambien directamente de la fórmula

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{dy}{dx}$$

en efecto se deduce de ella

$$d\omega = \frac{\frac{d^2y}{dx^2} dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Luego

$$r = \frac{ds}{d\omega} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Cuando la curva es referida a coordenadas polares, se reemplazan, en (9), x e y por sus valores

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Entonces, si θ es la variable independiente,

$$dx = d\rho \cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta \; d\theta$$
$$dy = d\rho \operatorname{sen}\theta + \rho \cos\theta \; d\theta$$

$$d^2x = d^2\rho \cos\theta - 2d\rho d\theta \operatorname{sen}\theta - \rho \cos\theta \; d\theta^2$$
$$d^2y = d^2\rho \operatorname{sen}\theta + 2d\rho d\theta \cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta \; d\theta^2$$

Se obtiene por consiguiente,

$$\frac{1}{r} = \frac{2d\rho^2 d\theta - \rho d^2\rho d\theta + \rho^2 d\theta^3}{\left(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

O bien

$$(11) \qquad \frac{1}{r} = \frac{2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho^2}{\left[\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

APLICACIONES

1.—*Radio de curvatura de la catenaria*

La ecuacion de esta curva es

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

De ella se deduce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}$$

Por otra parte

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) = \left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2}$$

Luego, segun (10),

$$r = \frac{y^3}{a^3}\,\frac{a^2}{y} = \frac{y^2}{a}$$

Así el radio de curvatura es proporcional al cuadrado de la ordenada.

Sea N el segmento de la normal comprendido entre la curva i el eje OX; se tiene, en un punto cualquiera de la curva

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Luego, en el caso de la catenaria

$$N = \frac{y^2}{a}$$

Se ve que el radio de curvatura es precisamente igual a N.

II.—*Radio de curvatura de la elipse*

Escribiremos las ecuaciones de la elipse bajo la forma

$$x = a \cos \phi$$
$$y = b \operatorname{sen} \phi$$

Elejiremos a ϕ como variable independiente; tendrémos entónces

$$dx = -a \operatorname{sen} \phi \, d\phi \qquad d^2x = -a \cos \phi \, d\phi^2$$
$$dy = +b \cos \phi \, d\phi \qquad d^2y = -b \operatorname{sen} \phi \, d\phi^2$$

Luego, segun (9

$$\frac{1}{r} = \frac{ab \, d\phi^3}{\left(a^2 \operatorname{sen}^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi\right)^{\frac{3}{2}} d\phi^3}$$

O bien

$$r = \frac{\left(a^2 \operatorname{sen}^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

Calculemos tambien el valor del segmento de normal N comprendido entre la curva i el eje OX, tendremos

$$N = b \operatorname{sen} \phi \sqrt{1 + \frac{b^2 \cos^2 \phi}{a^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}$$

Luego

$$r = \frac{a^2 \, N^3}{b^4}$$

El radio de curvatura es, por consiguiente, proporcional al cubo del segmento de normal N.

Sea N' el segmento de normal comprendido entre la curva i el eje $O\,Y$ se tiene

$$N' = x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}$$

Luego, en el caso de la elipse,

$$N' = a \cos \phi \sqrt{1 + \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \phi}{b^2 \cos^2 \phi}} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 \cos^2 \phi + a^2 \operatorname{sen}^2 \phi}$$

De aquí se deduce

$$r = \frac{b^2 \, N'^3}{a^4}$$

III.—*Radio de curvatura de la cicloide*

Las ecuaciones de la curva son

$$x = a\,(u - \operatorname{sen}\, u)$$
$$y = a\,(1 - \cos\, u)$$

Luego, si se toma el ángulo u como variable independiente

$$dx = a\,(1 - \cos u)\,du \qquad d^2x = a \operatorname{sen} u\, du^2$$
$$dy = a \operatorname{sen} u\, du \qquad d^2y = a \cos u\, du^2$$

Luego, segun (9),

$$\frac{1}{r} = \frac{a^2 \cos u\,(1 - \cos u) - a^2 \operatorname{sen}^2 u}{8\,a^3 \operatorname{sen}^3 \frac{u}{2}} = -\frac{1}{4\,a \operatorname{sen} \frac{u}{2}}$$

O bien, en valor absoluto

$$r = 4\,a \operatorname{sen} \frac{u}{2}$$

El segmento de normal N es, en este caso,

$$N = 2\,a \operatorname{sen} \frac{u}{2}$$

Luego,

$$r = 2\,N$$

IV.—*Radio de curvatura de la espiral logarítmica*

La ecuacion de esta curva es, en coordenadas polares

$$\rho = a\,e^{m\theta}$$

De aquí se deduce

$$\frac{d\rho}{d\theta} = m\, a\, e^{m\,\theta} = m\,\rho$$

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = m^2\, a\, e^{m\,\theta} = m^2\,\rho$$

Luego, segun (11),

$$\frac{1}{r} = \frac{2\,m^2\,\rho^2 - m^2\,\rho^2 + \rho^2}{\left(m^2\,\rho^2 + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho\sqrt{m^2+1}}$$

O bien

$$r = \rho\sqrt{m^2+1}$$

Se ve que el radio de curvatura es proporcional al radio vector.

V.—*Radios de curvatura i de torsion de la hélice*

Aplicaremos aquí las fórmulas jenerales. Las ecuaciones de la hélice son

$$\begin{aligned} x &= f(\sigma) \\ y &= \phi(\sigma) \\ z &= \sigma \operatorname{tg} \theta \end{aligned}$$

La variable σ representa el arco contado en la seccion recta del cilindro i θ es un ángulo constante. Se obtiene en primer lugar

$$ds = \frac{d\sigma}{\cos\theta}$$

3

Luego

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dx}{ds} = \cos\theta \, \dfrac{dx}{d\sigma} & \dfrac{d^2x}{ds^2} = \cos^2\theta \, \dfrac{d^2x}{d\sigma^2} \\[2ex] \dfrac{dy}{ds} = \cos\theta \, \dfrac{dy}{d\sigma} & \dfrac{d^2y}{ds^2} = \cos^2\theta \, \dfrac{d^2y}{d\sigma^2} \\[2ex] \dfrac{dz}{ds} = \operatorname{sen}\theta & \dfrac{d^2z}{ds^2} = 0 \end{array} \right.$$

A. OBRECHT

(Continuará)