MECÁNICA RACIONAL

SEGUNDA PARTE

DE LOS SISTEMAS MATERIALES

(Continuacion)

CAPÍTULO IV

MOVIMIENTO DE LOS SISTEMAS MATERIALES SOMETIDOS A LIGAZONES

Se llama *ligazones* ciertas condiciones analíticas impuestas de antemano a las coordenadas de los puntos de un sistema material. Así, por ejemplo, cuando los puntos de un sistema o algunos de ellos deben quedar a distancia invariable de un punto fijo o moverse, sin rozamiento, sobre curvas o superficies dadas o conservar distancias recíprocas constantes, se dice que el sistema está sometido a ligazones.

El efecto de las ligazones sobre cada punto del sistema, es equivalente a la accion de cierta fuerza; esta se llama *fuerza de* *ligazon*; su intensidad no se conoce de antemano i ella depende, a cada momento, del movimiento mismo del sistema i de la intensidad de las fuerzas esteriores e interiores. Sin embargo, en los ejemplos elejidos mas arriba, las fuerzas de ligazon tienen la propiedad comun de no trabajar durante el movimiento del sistema: en efecto, 1.° cuando un punto material está sometido a la condicion de describir, sin rozamiento, una curva o una superficie dada, la fuerza de ligazon es constantemente normal al cambio de lugar del punto i su trabajo es nulo; 2.° cuando los puntos del sistema o algunos de ellos deben conservar distancias recíprocas constantes, las fuerzas de ligazon son análogas a las acciones interiores i éstas no trabajan tampoco cuando la distancia de los puntos queda invariable.

Supondremos siempre que las ligazones son equivalentes a la accion de fuerzas que no trabajan cuando los puntos del sistema material considerado tienen cambios de lugar compatibles con las ligazones.

El movimiento de un sistema material, cuyos puntos o algunos de ellos estan sometidos a esta clase de ligazones, puede determinarse completamente cuando se conocen las fuerzas esteriores e interiores. La solucion de este problema es debida a *Lagrange*.

Sean: m la masa de uno de los puntos M del sistema; F la resultante de las fuerzas esteriores, F_i la resultante de las fuerzas interiores i F_e la resultante de las fuerzas de ligazon que obran sobre este punto. Consideremos un sistema fijo de tres ejes rectangulares i sean, respecto de este sistema, x, y, z las coordenadas de M; X, Y, Z las proyecciones de F; X_i, Y_i, Z_i las de F_i i X_e Y_e Z_e las de F_e ; se tiene, para el punto considerado

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + X_i + X_e \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + Y_i + Y_e \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Z_i + Z_e \end{aligned}\right.$$

Sea n el número de los puntos del sistema; el movimiento de cada uno de ellos será definido por tres ecuaciones análogas a (1); luego, para el conjunto de los n puntos, tendremos $3n$ ecuaciones. En ellas figuran $6n$ incógnitas: las $3n$ coordenadas i las $3n$ proyecciones de las fuerzas de ligazon incógnitas.

Las $3n$ ecuaciones consideradas pueden reunirse en una sola; sean, en efecto, δx, δy, δz las proyecciones de un cambio de lugar elemental, virtual i arbitario del punto M; las tres ecuaciones (1) son equivalentes a la siguiente

$$(2) \quad \delta x\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X-X_i-X_e\right)+\delta y\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y-Y_i-Y_e\right)$$
$$\delta z\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z-Z_i-Z_e\right)=0$$

Es bien evidente que la suma de estos tres términos, multiplicados cada uno por un coeficiente arbitrario, no puede ser nula sino cuando las ecuaciones (1) son satisfechas.

Cada uno de los puntos del sistema dará una ecuacion análoga a (2) i la suma de las n ecuaciones (2) podrá escribirse de la manera siguiente:

$$(3) \quad \Sigma\left[\delta x\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X-X_i-X_e\right)+\delta y\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y-Y_i-Y_e\right)\right.$$
$$\left.+\delta z\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z-Z_i-Z_e\right)\right]=0$$

Así la ecuacion (3) es equivalente a las $3n$ ecuaciones consideradas mas arriba; la solucion del problema, sin embargo, no se ha adelantado todavía, puesto que la ecuacion (3) contiene todavía las mismas $6n$ incógnitas.

Supongamos ahora que las $3n$ proyecciones de los cambios de lugar virtuales, en vez de ser arbitrarios, sean compatibles con las ligazones; la ecuacion (3) se simplifica; en efecto, la suma

$$\Sigma\left(X_e\,\delta x+Y_e\,\delta y+Z_e\,\delta z\right)$$

representa la suma de los trabajos de las fuerzas de ligazon relativas a los cambios de lugar virtuales de los puntos i esta suma es, por hipótesis, igual a cero. La ecuacion (3) se reduce entónces a la siguiente

$$(4)\qquad \Sigma\left[\delta x\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X-X_i\right)+\delta y\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y-Y_i\right)\right.$$
$$\left.+\delta z\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z-Z_i\right)\right]=0$$

Las fuerzas de ligazon han desaparecido. La ecuacion (4) no es ahora equivalente a $3n$ ecuaciones distintas, puesto que las $3n$ proyecciones de los cambios de lugar virtuales, en vez de ser arbitrarios, son compatibles con las ligazones.

Sea K el número de las ecuaciones de ligazon; los cambios de lugar virtuales, satisfacen a estas K ecuaciones; como, por hipótesis, estos cambios de lugar son infinitamente pequeños, las K ecuaciones de ligazon permitirán espresar *linealmente* las $3n$ proyecciones de los cambios de lugar, compatibles con las ligazones, en funcion de $3n-K$ cantidades enteramente independientes unas de otras; al sustituir estos valores en (4), el primer miembro se trasforma en la suma de $3n-K$ términos, multiplicados cada uno por una de las $3n-K$ cantidades arbitrarias. La nueva ecuacion será por consiguiente equivalente a $3n-K$ ecuaciones entre las $3n$ coordenadas de los puntos. Estas $3n-K$ ecuaciones i las K ecuaciones de ligazon, forman así un sistema de $3n$ ecuaciones entre las $3n$ coordenadas incógnitas i el tiempo.

El problema está, por consiguiente, resuelto teóricamente. Notaremos que la ecuacion (4) se aplica tambien a los sistemas de puntos no sometidos a ligazones; en este último caso, los $3n$ cambios de lugar virtuales son arbitrarios i la ecuacion (4) equivale a $3n$ ecuaciones distintas. En resúmen, la ecuacion (4) puede ser considerada como la *ecuacion jeneral de la dinámica de los sistemas materiales.*

Se puede dar, a la ecuacion de Lagrange, una forma que sea independiente del sistema de coordenadas adoptado. Para esto, definiremos una nueva cantidad jeométrica.

TRABAJO VIRTUAL DE UN VECTOR

Se llama *trabajo virtual* de un vector el producto del vector por un cambio de lugar elemental i por el coseno del ángulo que hace el vector con el cambio de lugar. El trabajo virtual de un vector es, como se ve, una cantidad jeométrica; las propiedades que se van a establecer en seguida no exijen que el cambio de lugar considerado sea infinitamente pequeño; solo exijen que este cambio de lugar sea recto. Si se ha considerado un cambio de lugar elemental en la definicion del trabajo virtual es para que haya analojía completa entre el trabajo elemental de una fuerza i el trabajo virtual del vector correspondiente a esta fuerza, respecto del cambio de lugar elemental del punto de aplicacion de la fuerza.

Las propiedades mas importantes del trabajo virtual de un vector se deducen casi directamente de su definicion; por lo demas, su demostracion es idénticamente la misma que la relativa al trabajo elemental de una fuerza; estas propiedades son las siguientes:

1.º El trabajo virtual de un vector es nulo cuando el cambio de lugar es perpendicular a la direccion del vector.

2.º Para un mismo cambio de lugar, el trabajo virtual de la resultante jeométrica de algunos vectores es igual a la suma de los trabajos virtuales de los vectores componentes.

3.º Si un cambio de lugar es la resultante jeométrica de otros, el trabajo virtual de un vector, respecto del cambio de lugar resultante, es igual a la suma de los trabajos virtuales del mismo vector, respecto de los cambios de lugar componentes. Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la propiedad anterior, puesto que el trabajo virtual de un vector no cambia cuando se sustituye el cambio de lugar al vector i el vector al cambio de lugar.

4.º Si δx, δy, δz son las proyecciones de un cambio de lugar δs sobre tres ejes rectangulares; X, Y, Z las tres proyecciones de un vector F, i $\delta\ \mathfrak{T} F$ el trabajo virtual del vector F, respecto del cambio de lugar δs, se tiene

$$\delta\ \mathfrak{T} F = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$$

5.º Si se multiplica el cambio de lugar o el vector por cierto coeficiente, el trabajo virtual correspondiente se multiplica por el mismo coeficiente.

APLICACION A LA ECUACION DE LAGRANGE

Sea γ la aceleracion de uno de los puntos del sistema material considerado; podremos escribir

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+m\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+m\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z=\delta\ \mathfrak{T}\,m\gamma$$

$$X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z=\delta\ \mathfrak{T}\,F$$

$$X_i\,\delta x+Y_i\,\delta y+Z_i\,\delta z=\delta\ \mathfrak{T}\,F_i$$

La ecuacion (4) se trasforma pues en la siguiente

$$\Sigma\,(\delta\,m\,\gamma-\delta\ \mathfrak{T}\,F-\delta\ \mathfrak{T}\,F_i)=0$$

Esta última ecuacion es, como se ve, independiente de la situacion de los ejes de coordenadas. Se puede escribir tambien

$$\Sigma\,\delta\ \mathfrak{T}\,m\,\gamma=\Sigma\,\delta\ \mathfrak{T}\,F+\Sigma\,\delta\ \mathfrak{T}\,F_i \tag{5}$$

Luego, para determinar el movimiento de un sistema material, sometido o no a ligazones, basta escribir que, *a cada instante la suma de los trabajos virtuales de los vectores $m\gamma$ es igual a la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas esteriores e interiores, para todos los cambios de lugar virtuales de los puntos del sistema, compatibles con las ligazones.*

CASO DEL EQUILIBRIO

Un sistema material sometido a fuerzas, está en equilibrio cuando todos sus puntos estan en reposo respecto de un sistema de comparacion, fijo en el espacio o animado de una traslacion recta i uniforme; en este último caso, las ligazones i las fuerzas son referidas tambien al sistema de comparacion móvil.

Si el sistema material está en equilibrio, las aceleraciones de todos sus puntos son nulas i la ecuacion jeneral (5) se reduce a

$$\Sigma\,\delta\,\mathcal{T}F + \Sigma\,\delta\,\mathcal{T}F_i = 0 \tag{6}$$

Tal es, por consiguiente, la condicion *necesaria* del equilibrio; ésta espresa que *la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas esteriores e interiores es nula para todos los cambios de lugar de los puntos del sistema, compatibles con las ligazones.*

Para que la condicion (6) sea *suficiente* es necesario que, a cierto momento inicial, el sistema material esté en equilibrio. Supongamos, en efecto, que a cada momento la condicion (6) sea satisfecha; si el sistema material se mueve, la misma condicion (6) se aplicará a los cambios de lugar que tienen efectivamente los puntos del sistema, durante cada intervalo de tiempo dt, puesto que estos cambios de lugar son compatibles con las ligazones; tendremos, por consiguiente, a cada momento

$$\Sigma\,d\,\mathcal{T}F + \Sigma\,d\,\mathcal{T}F_i = 0$$

Por otra parte, se tiene tambien, a cada momento

$$d\,\Sigma\,\frac{1}{2}mv^2 = \Sigma\,d\,\mathcal{T}F + \Sigma\,d\,\mathcal{T}\,d\,F_i$$

Luego, si la condicion (6) es satisfecha, se tendrá

$$d\,\Sigma\,\frac{1}{2}mv^2 = 0$$

O bien

$$\Sigma\,\frac{1}{2}mv^2 = \text{Const.}$$

Si, a cierto momento inicial, el sistema material está en equilibrio, la constante es nula; luego las velocidades de todos los puntos quedan nulas i el sistema material queda indefinidamente en equilibrio.

En los demas casos, la condicion (6) indica solo que la enerjía cinética total del sistema queda constante.

5.º Si se multiplica el cambio de lugar o el vector por cierto coeficiente, el trabajo virtual correspondiente se multiplica por el mismo coeficiente.

APLICACION A LA ECUACION DE LAGRANGE

Sea γ la aceleracion de uno de los puntos del sistema material considerado; podremos escribir

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + m\,\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + m\,\frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \delta\ \mathcal{T} m\gamma$$

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \delta\ \mathcal{T} F$$

$$X_i\,\delta x + Y_i\,\delta y + Z_i\,\delta z = \delta\ \mathcal{T} F_i$$

La ecuacion (4) se trasforma pues en la siguiente

$$\Sigma\,(\delta\, m\,\gamma - \delta\ \mathcal{T} F - \delta\ \mathcal{T} F_i) = 0$$

Esta última ecuacion es, como se ve, independiente de la situacion de los ejes de coordenadas. Se puede escribir tambien

$$(5) \qquad \Sigma\,\delta\ \mathcal{T} m\,\gamma = \Sigma\,\delta\ \mathcal{T} F + \Sigma\,\delta\ \mathcal{T} F_i$$

Luego, para determinar el movimiento de un sistema material, sometido o no a ligazones, basta escribir que, *a cada instante, la suma de los trabajos virtuales de los vectores $m\gamma$ es igual a la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas esteriores e interiores, para todos los cambios de lugar virtuales de los puntos del sistema, compatibles con las ligazones.*

CASO DEL EQUILIBRIO

Un sistema material sometido a fuerzas, está en equilibrio cuando todos sus puntos estan en reposo respecto de un sistema de comparacion, fijo en el espacio o animado de una traslacion recta i uniforme; en este último caso, las ligazones i las fuerzas son referidas tambien al sistema de comparacion móvil.

Si el sistema material está en equilibrio, las aceleraciones de todos sus puntos son nulas i la ecuacion jeneral (5) se reduce a

$$\sum \delta\, \mathcal{T} F + \sum \delta\, \mathcal{T} F_i = 0 \tag{6}$$

Tal es, por consiguiente, la condicion *necesaria* del equilibrio; ésta espresa que *la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas esteriores e interiores es nula para todos los cambios de lugar de los puntos del sistema, compatibles con las ligazones.*

Para que la condicion (6) sea *suficiente* es necesario que, a cierto momento inicial, el sistema material esté en equilibrio. Supongamos, en efecto, que a cada momento la condicion (6) sea satisfecha; si el sistema material se mueve, la misma condicion (6) se aplicará a los cambios de lugar que tienen efectivamente los puntos del sistema, durante cada intervalo de tiempo dt, puesto que estos cambios de lugar son compatibles con las ligazones; tendremos, por consiguiente, a cada momento

$$\sum d\, \mathcal{T} F + \sum d\, \mathcal{T} F_i = 0$$

Por otra parte, se tiene tambien, a cada momento

$$d \sum \frac{1}{2} mv^2 = \sum d\, \mathfrak{T} F + \sum d\, \mathcal{T}\, d\, F_i$$

Luego, si la condicion (6) es satisfecha, se tendrá

$$d \sum \frac{1}{2} mv^2 = 0$$

O bien

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 = \text{Const.}$$

Si, a cierto momento inicial, el sistema material está en equilibrio, la constante es nula; luego las velocidades de todos los puntos quedan nulas i el sistema material queda indefinidamente en equilibrio.

En los demas casos, la condicion (6) indica solo que la enerjía cinética total del sistema queda constante.

SIGNIFICACION ANALÍTICA DE LA CONDICION (6)

Supongamos que las fuerzas esteriores e interiores tengan un potencial; se podrá escribir, para uno de los puntos del sistema

$$X = \frac{d\phi}{dx} \qquad X_i = \frac{d\phi_i}{dx}$$

$$Y = \frac{d\phi}{dy} \qquad Y_i = \frac{d\phi_i}{dy}$$

$$Z = \frac{d\phi}{dz} \qquad Z_i = \frac{d\phi_i}{dz}$$

Luego

$$\delta\, \mathfrak{T} F = \frac{d\phi}{dx}\,\delta x + \frac{d\phi}{dy}\,\delta y + \frac{d\phi}{dz}\,\delta z = \delta\phi$$

$$\delta\, \mathfrak{T} F_i = \frac{d\phi_i}{dx}\,\delta x + \frac{d\phi_i}{dy}\,\delta y + \frac{d\phi_i}{dz}\,\delta z = \delta\phi_i$$

I, parte todos los puntos

$$\Sigma\,\delta\, \mathfrak{T} F + \Sigma\,\delta\, \mathfrak{T} F_i = \Sigma\,\delta\phi + \Sigma\,\delta\phi_i = \delta\,(\Sigma\,\phi + \Sigma\phi_i)$$

Pongamos

$$U = \Sigma\,\phi + \Sigma\,\phi_i$$

La funcion U es el potencial de las fuerzas esteriores e interiores; es una funcion de las coordenadas de todos los puntos i ella puede tambien contener implícitamente el tiempo; la condicion (6) puede escribirse entónces

$$\delta\, U = 0 \tag{7}$$

La característica δ tiene la misma significacion que el signo de la diferenciacion, sin embargo, se debe observar que la diferenciacion con la característica δ es solo relativa a las coordenadas i no al tiempo.

La ecuacion (7) significa que si, a un mismo momento t, los puntos del sistema material tienen cambios de lugar infinitamente pequeños, la funcion potencial U tiene una variacion nula o, mas exactamente, una variacion infinitamente pequeña de segundo órden respecto de los cambios de lugar, considerados como infinitamente pequeños de primer órden. En resúmen la funcion potencial U es *máxima* o *mínima* en el caso del equilibrio.

ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

Supongamos un sistema material en equilibrio, bajo la accion de fuerzas esteriores e interiores; estas fuerzas satisfacen a la condicion (6); i, si estas fuerzas tienen un potencial, la funcion potencial U es máxima o mínima.

Sea ΔU el incremento de la funcion U cuando el sistema material pasa de la posicion del equilibrio a otra posicion infinitamente próxima; podremos escribir siempre

$$\Delta U = \delta U + \frac{1}{2}\delta^2 U + \ldots\ldots$$

El primer término es nulo segun (6); el término siguiente es infinitamente pequeño de segundo órden; su signo puede ser: o bien siempre negativo, o bien siempre positivo, o bien negativo para ciertos sistemas de cambios de lugar i positivo para otros. Distinguiremos el caso en que el signo de $\delta^2 U$ es siempre negativo, cualesquiera que sean las direcciones de los cambios de lugar compatibles con las ligazones; la funcion U es entónces un *máximo*.

En este caso, el incremento ΔU será negativo si ΔU es infinitamente pequeño i quedará negativo si su valor queda menor que cierto límite ϵ, perfectamente determinado por la naturaleza de la funcion U.

Imprimamos al sistema material en equilibrio cierta impulsion; el sistema se pondrá en movimiento i los cambios de lugar de sus puntos serán compatibles con las ligazones. Sea $\Sigma\, m v_0^2$

la fuerza viva inicial del sistema i Σmv^2 su fuerza viva a un momento cualquiera t, se tendrá

$$(8) \qquad \frac{1}{2} \Sigma mv^2 = \frac{1}{2} \Sigma mv_0{}^2 + \Delta U$$

Si el potencial es máxima, en la situacion del equilibrio, ΔU principia por ser negativo i queda negativo hasta que su valor absoluto llegue a ser igual al límite ϵ, considerado mas arriba.

En la ecuacion (8) el primer miembro es esencialmente positivo, luego al principiar el movimiento, el valor absoluto de ΔU queda forzosamente menor que $\frac{1}{2} \Sigma mv_0{}^2$. Por otra parte, se puede siempre elejir la impulsion inicial de tal manera que $\frac{1}{2} \Sigma mv_0{}^2$ sea menor que el límite ϵ, luego ΔU no podrá nunca cambiar de signo i su valor absoluto oscilará forzosamente entre cero i $\frac{1}{2} \Sigma mv_0{}^2$.

En resúmen, si la funcion potencial es máxima en el caso del equilibrio i si la impulsion inicial es suficientemente pequeña, el incremento ΔU de esta funcion queda siempre comprendido entre cero i $\frac{1}{2} \Sigma mv_0{}^2$; ademas, esta última cantidad puede elejirse tan pequeña como se quiere. Luego los cambios de lugar de los puntos del sistema quedan indefinidamente del mismo órden de pequeñez, al rededor de la posicion del equilibrio. Es lo que caracteriza la *estabilidad* del equilibrio.

Si el potencial U no es *máximo* en la situacion del equilibrio, el incremento ΔU de la funcion puede ser positivo para ciertos sistemas de cambios de lugar o para todos; entónces, en el momento inicial, la fuerza viva del sistema puede aumentar sin que se pueda fijar límites a este aumento; el equilibrio es entónces *instable*.

Así la *condicion de estabilidad del equilibrio de un cuerpo es que la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas esteriores e interiores quede siempre* NEGATIVA, *cualesquiera que sean los cambios de lugar virtuales, compatibles con las ligazones del* *cuerpo*. Esta suma es infinitamente pequeña de segundo órden cuando los cambios de lugar se consideran como infinitamente pequeños de primer órden.

PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

Se llama *fuerza de inercia* de un punto material de masa m, cuya aceleracion es γ, un *vector* de lonjitud $m\gamma$, de misma direccion que γ i de sentido opuesto.

La ecuacion jeneral (5) de Lagrange puede escribirse tambien de la manera siguiente

$$(9) \qquad \Sigma\delta\,\mathfrak{T}F + \Sigma\delta\,\mathfrak{T}F_i + \Sigma\delta\,\mathfrak{T}(-m\gamma) = 0$$

Supongamos que, a cierto momento t, se aplica a cada punto de un sistema material móvil un vector igual a su fuerza de inercia. La ecuacion (9) es la condicion *necesaria* para que el sistema material, sometido a las fuerzas esteriores, interiores i de inercia, esté en equilibrio.

Esto no quiere decir que un sistema material en movimiento, queda en reposo, ni siquiera durante un elemento de tiempo dt, cuando, a cada uno de sus puntos, se aplica una fuerza igual a su fuerza de inercia; lo que sucede, en realidad, es que la enerjía cinética del sistema material, despues de la agregacion de las fuerzas de inercia, queda constante durante un elemento de tiempo infinitamente pequeño dt.

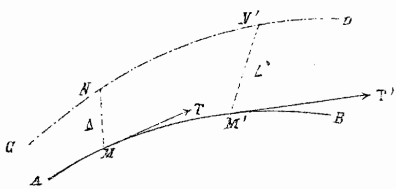
Se debe observar que las fuerzas interiores incógnitas deben probablemente obrar de diferente manera cuando se agrega a cada punto su fuerza de inercia; luego el principio de d'Alembert no puede aplicarse lejítimamente sino en el caso en que la agregacion hipotética de las fuerzas de inercia no cambia el modo de obrar de las acciones interiores. Es precisamente el caso del sólido invariable en el cual por definicion las fuerzas interiores no trabajan nunca.

PRINCIPIO DE HAMILTON

Este principio se deduce de la ecuacion jeneral (5). Supongamos que los cambios de lugar virtuales, que figuran en esta ecuacion, sean funciones del tiempo, de tal manera que la trayectoria de cada punto se trasforme virtualmente en otra infinitamente próxima; se comprende entónces que, a un momento cualquiera t, la velocidad v de un punto se trasformara virtualmente en otra $v+\delta v$, i ésta hará un ángulo infinitamente pequeño con v. Tratemos de trasformar, en este caso, el primer miembro de la ecuacion (5).

Sea (fig. 8) $A\ B\ C$ la trayectoria de uno de los puntos del sistema; M i M' las posiciones de este punto, en los momentos t i $t+dt$; $MN=\Delta$ i $M'N'=\Delta'$ los cambios de lugar virtuales, funciones del tiempo; a medida que M describe la trayectoria AB, N describe virtualmente la trayectoria CD i se tiene en la figura

Fig. 8.



$$MM'=vdt$$

$$NN'=(v+\delta v)\,dt$$

Como la cantidad de movimiento $m(v+dv)$ del punto M, en el momento $t+dt$, es la resultante jeométrica de mv i $m\,\gamma\,dt$, se tiene, al proyectar estos vectores sobre MN:

$$m(v+dv)\cos(\Delta, v+dv)=mv\cos(\Delta, v)+m\,\gamma\,dt\cos(\gamma, v)$$

Multipliquemos los dos miembros por Δ i tendremos

$$(10)\qquad m(v+dv)\,\Delta\cos(\Delta, v+dv)=\delta\ \mathfrak{T}\,mv+dt\ \delta\ \mathfrak{T}\,m\gamma$$

Proyectemos ahora el polígono cerrado $MNN'M'$ sobre la direccion MT' de la cantidad de movimiento $m\ (v+dv)$; si se desprecian infinitamente pequeños de órden superior a los que se conservan, se tiene

$$\Delta\cos(\Delta, v+dv)+(v+\delta v)\,dt-\Delta'\cos(\Delta', v+dv)-v\,dt=0$$

O bien

$$\Delta\cos(\Delta, v+dv)=\Delta'\cos(\Delta', v+dv)-\delta\,v\,dt$$

Multipliquemos los dos miembros por $m(v+dv)$; notaremos que la espresion

$$m\,(v+dv)\,\Delta' \cos\,(\Delta', v+dv)$$

es el trabajo virtual del vector $m\,(v+dv)$ respecto del cambio de lugar Δ', este trabajo virtual es una funcion del tiempo, luego su valor se puede escribir de la manera siguiente

$$\delta\ \mathfrak{T} mv + \frac{d(\delta\ \mathfrak{T}\, mv)}{dt}dt$$

Se tiene finalmente

$$(11) \qquad m\,(v+dv)\,\Delta \cos\,(\Delta, v+dv) = \delta\ \mathfrak{T}\, mv + \frac{d(\delta\ \mathfrak{T} mv)}{dt}\,dt - mv\,\delta\, v\, dt$$

Luego, si se comparan (10) i (11)

$$dt.\ \delta\ \mathfrak{T}\ \gamma = \frac{d\,(\delta\ \mathfrak{T}\, mv)}{dt}\,dt - mv\,\delta\, v\, dt$$

O bien

$$\delta\ \mathfrak{T}\, m\,\gamma = \frac{d(\delta\ \mathfrak{T}\, mv)}{dt} - \delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

I, para todos los puntos del sistema material

$$\Sigma\,\delta\ \mathfrak{T}\, m\ \gamma = \frac{d\,\Sigma\,\delta\ \mathfrak{T}\, mv^2}{dt} - \delta\,\Sigma\,\frac{1}{2}\,mv^2$$

Llevando este valor en (5) se obtiene

$$(12) \qquad \frac{d\,\Sigma\ \mathfrak{T}\, mv}{dt} = \Sigma\,\delta\ \mathfrak{T} F + \Sigma\,\delta\ \mathfrak{T} F_i + \delta\,\Sigma\frac{1}{2}mv^2$$

Supongamos ahora que las fuerzas esteriores e interiores tengan un potencial U i sea

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = T$$

Podremos escribir

$$\frac{d \Sigma \delta \mathfrak{T} m v}{dt} = \delta (T + U) \tag{13}$$

La única condicion impuesta a los cambios de lugar virtuales es de ser compatibles con las ligazones; podemos suponer, por consiguiente, que, en dos momentos arbitrarios t_1 i t_2, estos cambios de lugar virtuales sean nulos. Integramos entónces la ecuacion (13) entre los dos límites t_1 i t_2; la integral definida del primer miembro es nula i se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T + U) dt = 0$$

Como el signo de diferenciacion δ no afecta el tiempo, se puede escribir tambien

$$\left\{ \begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} (T + U)\, dt \\ \delta\, S &= 0 \end{aligned} \right. \tag{14}$$

La funcion S, que Hamilton llama *funcion principal*, no contiene implícitamente el tiempo, solo contiene los dos límites fijos i arbitrarios t_1 i t_2; su diferencial $\delta\, S$ es nula cuando las coordenadas de los puntos del sistema tienen variaciones virtuales infinitamente pequeñas; luego la funcion S es máxima o mínima cuando las coordenadas de los puntos del sistema material tienen los valores que corresponden al movimiento efectivo de estos puntos en el espacio.

Este es el principio de Hamilton.

PRINCIPIO DE LA MENOR ACCION

Este principio, enunciado por Lagrange, es un caso particular del principio de Hamilton, cuando el potencial de las fuerzas esteriores e interiores no contiene implícitamente el tiempo; se tiene, en efecto, en este caso

$$\Sigma\, \delta\, \mathfrak{T} F + \Sigma\, \delta\, \mathfrak{T} F_i = \delta\, \Sigma \frac{1}{2} m v^2$$

O bien

$$\delta\, U = \delta\, T$$

La funcion S se reduce entónces a la siguiente

$$S = \int_{t_1}^{t_2} 2\, T\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, m v.^2\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, m v.\, ds$$

Así, cada una de las integrales que representan el valor de S es un máximo o mínimo en el caso del movimiento efectivo del sistema. Es fácil de comprender que, en jeneral, la funcion S debe ser un *mínimo.*

Tal es el principio de la menor accion.

DETERMINACION DE LAS FUERZAS DE LIGAZON

En las fórmulas (1) figuran las tres proyecciones de la resultante F_e de las fuerzas de ligazon que obran sobre un punto. Se concibe que, una vez conocido el movimiento del sistema, se pueda calcular, para cada punto, la resultante F_e de las fuerzas de ligazon que obran sobre él. Sin embargo, no son estas resultantes que hai interes en conocer, sino las fuerzas que equivalen a cada una de las ligazones.

Estas fuerzas pueden determinarse de la manera siguiente: consideremos un sistema material sometido a ligazones, su movimiento es completamente determinado por la ecuacion jeneral de Lagrange.

$$\Sigma\, \delta\, \mathfrak{T} m\, \gamma = \Sigma\, \delta\, \mathfrak{T} F + \Sigma\, \delta\, \mathfrak{T} F_i$$

En esta ecuacion, los cambios de lugar virtuales son compatibles con las ligazones; sea ahora f una fuerza equivalente a una de las ligazones; supongamos esta ligazon suprimida i reemplazada por la fuerza f i demos, a los puntos del sistema, cambios de lugar virtuales que hagan trabajar la fuerza f i que sean compatibles con las ligazones restantes; designemos los trabajos virtuales correspondientes con la característica Δ, tendremos

$$(15) \qquad \Sigma \Delta \mathfrak{T} m\gamma = \Sigma \Delta \mathfrak{T} F + \Sigma \Delta \mathfrak{T} F_i + \Delta \mathfrak{T} f$$

En esta ecuacion, la única incógnita es f, luego f estará así determinado. De la misma manera se podrán obtener las demas ligazones.

Si el sistema material está en equilibrio, se tiene simplemente

$$(16) \qquad \Sigma \Delta \mathfrak{T} F + \Sigma \Delta \mathfrak{T} F_i + \Delta \mathfrak{T} f = 0$$

Esta ecuacion puede aplicarse tambien al caso del movimiento si, a las fuerzas esteriores, se agregan las fuerzas de inercia de todos los puntos; es una consecuencia evidente de (15).

APLICACION A LOS SISTEMAS ARTICULADOS INDEFORMABLES

Un sistema articulado indeformable puede considerarse como la reunion de n puntos, unidos unos con otros por medio de rectas o *barras* de lonjitud invariable; el número de las barras que unen los n puntos es indeterminado, sin embargo, se concibe que se necesitará cierto número *mínimo* de barras para asegurar la indeformabilidad del sistema. Cuando un sistema articulado tiene este número mínimo de barras se dice que el sistema es *estrictamente indeformable.*

Busquemos en primer lugar cuál es el número de barras de un sistema *estrictamente indeformable.* Supondremos el caso jeneral en que los puntos son repartidos de una manera cualquiera en el espacio.

Sea n el número de los puntos; tres de ellos, no situados en línea recta, necesitan tres barras para formar una figura estrictamente indeformable; cada uno de los $n-3$ otros puntos será ligado invariablemente a los primeros por medio de tres barras; luego tenemos un número total de barras igual a

$$3+3(n-3)=3n-6$$

Cada barra representa una ecuacion de ligazon; por otra parte, la situacion en el espacio, del sistema formado por los n puntos es determinado por las $3n$ coordenadas de los puntos; se averigua así que *seis* condiciones son necesarias i suficientes para determinar la posicion de un sólido invariable en el espacio.

Los n puntos pueden unirse unos a otros por un número total de barras igual a

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

luego el número de las barras *supérfluas* será

$$\frac{n(n-1)}{2}-(3n-6)$$

Este número puede determinarse directamente; en efecto, una vez elejidos tres puntos, cada uno de los $n-3$ restantes son definidos por las tres barras que los unen a los tres primeros; luego todas las barras que unen, entre sí, estos $n-3$ puntos son supérfluos; el número de estas barras es

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

Este es por consiguiente tambien el número de las barras supérfluas. Se averigua en efecto la relacion

$$\frac{n(n-1)}{2}-(3n-6)=\frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

Mauricio Levy, en su tratado de *Statique graphique* (el mejor i mas completo de los que se han publicado hasta ahora) hace notar que un sistema articulado estrictamente indeformable es *libremente dilatable;* miéntras tanto, un sistema articulado, con barras supérfluas, no se puede dilatar libremente.

La distincion entre los sistemas articulados *estrictamente indeformables* i los sistemas *indeformables con barras supérfluas* tiene una gran importancia en la práctica cuando se trata de determinar las presiones o tensiones a las cuales estan sometidas las barras.

DETERMINACION DE LAS PRESIONES I TENSIONES DE LAS BARRAS DE UN SISTEMA ARTICULADO

Distinguiremos dos clases de ligazones: unas *interiores* i otras *esteriores.*

Como el sistema de los n puntos es un verdadero sólido invariable, el principio de d'Alembert podrá aplicarse lejítimamente cuando el sistema será móvil en el espacio. En resúmen, podemos considerar solo el caso del equilibrio i los resultados obtenidos podrán aplicarse en seguida al caso mas jeneral del movimiento, a la condicion de agregar a cada punto su fuerza de inercia.

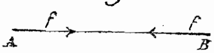
Los cambios de lugar virtuales, compatibles con las ligazones del sistema, no hacen trabajar las fuerzas interiores; luego la condicion necesaria del equilibrio se reduce, en este caso, a

$$\Sigma \delta \mathfrak{T} F = 0$$

1.° *Ligazones interiores.* Sean A i B (fig. 9) dos puntos del sistema articulado, la presencia de la barra AB es equivalente a la accion de dos fuerzas iguales a f, aplicadas en A i B, de sentido contrario i dirijidas segun AB. Si las fuerzas f son, como en la figura, dirijidas hácia el interior de la barra, ésta es sometida a una *tension;* en efecto, para mantener los puntos A i B en equilibrio, despues de haber suprimido la barra AB, es necesario aplicarles las fuerzas f, dirijidas hácia el interior de la barra; luego la reaccion de estos puntos sobre la barra equivale a una tension f. Si las fuerzas f estuvieran dirijidas hácia el esterior de la barra, ésta seria sometida a una *presion* f.

Las acciones interiores que obran en el sistema, fuera de las ligazones, son las acciones moleculares que aseguran la invariabilidad de lonjitud de las barras; estas acciones no se conocen, pero tampoco intervienen en las condiciones del equilibrio, puesto que los cambios de lugar virtuales, compatibles con las ligazones, no hacen trabajar estas fuerzas.

Fig. 9.



Para determinar la tension o la presion a la cual está sometida la barra AB, se supone esta barra suprimida i reemplazada por las dos fuerzas f. Se da entónces, a los puntos del sistema, así modificado, cambios de lugar virtuales que hagan variar la distancia AB de cierta cantidad Δr i que sean compatibles con las ligazones restantes. Las acciones moleculares que obraban en la barra AB no intervienen ahora i se tendrá simplemente

$$\Sigma \Delta \mathfrak{T} F + f \Delta r = 0$$

Esta ecuacion determina por consiguiente f.

Para que se pueda hacer variar la distancia de dos puntos sin que cambien las distancias recíprocas de los demas puntos del sistema, es necesario que el sistema sea libremente dilatable o *estrictamente indeformable;* en efecto, si hubieran barras supérfluas, algunas de las barras podrian suprimirse i las ligazones restantes bastarian para dejar el sistema indeformable; supongamos, por ejemplo, que, habiendo suprimido la barra AB, las ligazones restantes basten para dejar la distancia AB invariable; entónces, cualquiera que sea el sistema de los cambios de lugar compatibles con las ligazones restantes, Δr será igual a cero, luego seria imposible determinar f.

En este caso, para hacer variar la distancia AB habria que desarrollar ciertas acciones moleculares en las otras barras i el trabajo virtual de estas acciones moleculares deberia entónces tomarse en cuenta, para determinar f.

En resúmen, *para determinar las presiones o tensiones de las barras de un sistema articulado indeformable, sin que intervengan las acciones moleculares incógnitas, es necesario que el sistema sea estrictamente indeformable o libremente dilatable.*

2.° *Ligazones esteriores.* Para determinar una ligazon esterior, se debe suponer que esta ligazon se haya suprimido; se dan entónces, a los puntos del sistema indeformable, cambios de lugar virtuales compatibles con las ligazones restantes i la fuerza de ligazon puede determinarse si, entre estos últimos cambios de lugar, algunos hacen trabajar la fuerza buscada.

Si la ligazon considerada impide la libre dilatacion del sistema, el trabajo de la fuerza correspondiente enjendrará forzosamente acciones moleculares incógnitas; luego, *las únicas ligazones esteriores que se pueden determinar, sin la intervencion de acciones moleculares, son las que no impiden la libre dilatacion del sistema indeformable.*

El número de las ligazones esteriores debe ser limitado, puesto que éstas deben equivaler a seis condiciones a lo mas. Si las ligazones equivalen a mas de seis condiciones, unas podrán ser simplemente supérfluas i las otras podrán impedir la libre dilatacion del sistema. En estos casos, la determinacion de las fuerzas de ligazon, independientemente de las acciones moleculares, dará lugar a un problema indeterminado o imposible.

CAPÍTULO V

CINEMÁTICA DEL SÓLIDO INVARIABLE

En este capítulo estudiaremos cuáles son los movimientos mas jenerales que puede tomar un sólido invariable i que sean compatibles con sus ligazones.

El movimiento mas sencillo es el de *traslacion*; es bien evidente que este movimiento es compatible con las ligazones del sólido invariable.

ROTACION AL REDEDOR DE UN EJE FIJO

Este movimiento es tambien compatible con las ligazones del sólido invariable. Cada punto del sólido describe entónces una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje i, en un mismo momento, la velocidad de cada punto es proporcional a su distancia al eje de rotacion.

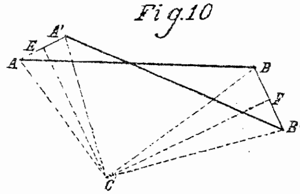
Se llama *velocidad angular*, la velocidad de los puntos situados a la unidad de distancia del eje; sea entónces ω la velocidad angular de un sólido, a cierto momento t, i r la distancia de uno de los puntos al eje de rotacion, la velocidad de este punto, en el momento t, será

$$v = \omega r$$

MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO PARALELAMENTE A UN PLANO

Sea P el plano considerado; los puntos del sólido, situados en un plano P', paralelo a P, quedarán situados en este plano i bastará conocer el movimiento de una figura plana cualquiera, ligada al sólido en el plano P', para conocer el movimiento del sólido mismo. Así la cuestion se reduce a determinar el movimiento de una figura plana, de forma invariable, en su plano.

Fig.10



Sean (fig. 10) A i B dos puntos de la figura plana considerada; bastará conocer a cada momento la posicion de la recta AB para conocer, en los mismos momentos, la posicion de la figura. Sea $A'B'$ otra posicion de AB; se puede siempre pasar de AB a $A'B'$ por una sola rotacion al rededor de cierto punto determinado C del plano.

En efecto, unamos AA' i BB' i, por los puntos medios E i F de AA' i BB', levantemos las perpendiculares EC, FC a esas rectas; sea C el punto de encuentro; los dos triángulos ACB i $A'CB'$ son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales, luego se puede llevar AB sobre $A'B'$ por una sola rotacion al rededor del punto C.

Cuando una figura plana se mueve de una manera continua en su plano, su movimiento puede ser considerado como una sucesion de movimientos elementales i cada uno de estos últi-

2.° *Ligazones esteriores.* Para determinar una ligazon esterior, se debe suponer que esta ligazon se haya suprimido; se dan entónces, a los puntos del sistema indeformable, cambios de lugar virtuales compatibles con las ligazones restantes i la fuerza de ligazon puede determinarse si, entre estos últimos cambios de lugar, algunos hacen trabajar la fuerza buscada.

Si la ligazon considerada impide la libre dilatacion del sistema, el trabajo de la fuerza correspondiente enjendrará forzosamente acciones moleculares incógnitas; luego, *las únicas ligazones esteriores que se pueden determinar, sin la intervencion de acciones moleculares, son las que no impiden la libre dilatacion del sistema indeformable.*

El número de las ligazones esteriores debe ser limitado, puesto que éstas deben equivaler a seis condiciones a lo mas. Si las ligazones equivalen a mas de seis condiciones, unas podrán ser simplemente supérfluas i las otras podrán impedir la libre dilatacion del sistema. En estos casos, la determinacion de las fuerzas de ligazon, independientemente de las acciones moleculares, dará lugar a un problema indeterminado o imposible.

CAPÍTULO V

CINEMÁTICA DEL SÓLIDO INVARIABLE

En este capítulo estudiaremos cuáles son los movimientos mas jenerales que puede tomar un sólido invariable i que sean compatibles con sus ligazones.

El movimiento mas sencillo es el de *traslacion*; es bien evidente que este movimiento es compatible con las ligazones del sólido invariable.

ROTACION AL REDEDOR DE UN EJE FIJO

Este movimiento es tambien compatible con las ligazones del sólido invariable. Cada punto del sólido describe entónces una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje i, en un mismo momento, la velocidad de cada punto es proporcional a su distancia al eje de rotacion.

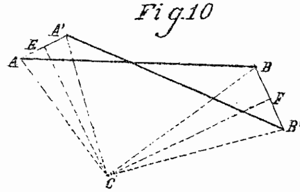
Se llama *velocidad angular*, la velocidad de los puntos situados a la unidad de distancia del eje; sea entónces ω la velocidad angular de un sólido, a cierto momento t, i r la distancia de uno de los puntos al eje de rotacion, la velocidad de este punto, en el momento t, será

$$v=\omega r$$

MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO PARALELAMENTE A UN PLANO

Sea P el plano considerado; los puntos del sólido, situados en un plano P', paralelo a P, quedarán situados en este plano i bastará conocer el movimiento de una figura plana cualquiera, ligada al sólido en el plano P', para conocer el movimiento del sólido mismo. Así la cuestion se reduce a determinar el movimiento de una figura plana, de forma invariable, en su plano.

Fig.10



Sean (fig. 10) A i B dos puntos de la figura plana considerada; bastará conocer a cada momento la posicion de la recta AB para conocer, en los mismos momentos, la posicion de la figura. Sea $A'B'$ otra posicion de AB; se puede siempre pasar de AB a $A'B'$ por una sola rotacion al rededor de cierto punto determinado C del plano.

En efecto, unamos AA' i BB' i, por los puntos medios E i F de AA' i BB', levantemos las perpendiculares EC, FC a esas rectas; sea C el punto de encuentro; los dos triángulos ACB i $A'C'B'$ son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales, luego se puede llevar AB sobre $A'B'$ por una sola rotacion al rededor del punto C.

Cuando una figura plana se mueve de una manera continua en su plano, su movimiento puede ser considerado como una sucesion de movimientos elementales i cada uno de estos últimos puede confundirse con una rotacion elemental al rededor de cierto punto C del plano.

Es análogo a lo que se hace cuando se considera el movimiento continuo de un punto material como la sucesion de movimientos elementales rectos i uniformes.

En jeneral, la situacion del punto C cambia de una manera continua en el plano; su posicion a un momento dado se llama *centro instantáneo de rotacion.*

De ahí se deduce que, *durante el movimiento continuo de una figura plana en su plano, los normales a las trayectorias de todos los puntos pasan, a un mismo momento por el centro instantáneo, de rotacion.*

Volvamos a la consideracion del sólido; cuando a un momento dado, la figura plana, situada en el plano P', jira al rededor de un punto C de este plano, el sólido entero jira al rededor de un eje, perpendicular en C, al plano P'; este eje se llama *eje instantáneo de rotacion.*

Así, *cuando un sólido se mueve paralelamente a un plano, su movimiento elemental, a un momento dado cualquiera, es una rotacion al rededor de un eje perpendicular al plano considerado.*

MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO AL REDEDOR DE UN PUNTO FIJO

Sea O el punto fijo i S una esfera de centro O; una figura cualquiera, ligada al sólido i situada sobre la esfera S, quedará situada sobre la misma esfera durante el movimiento del sólido; basta por consiguiente determinar el movimiento de esta figura esférica para conocer el movimiento del sólido.

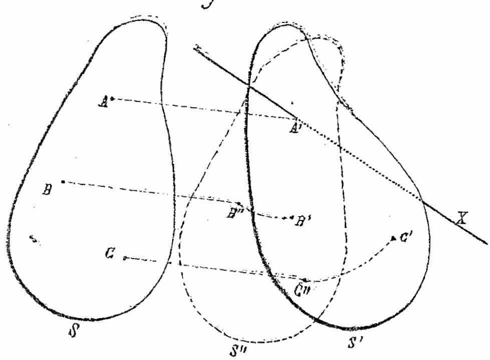
Una figura análoga a (10), en la cual las rectas son reemplazadas por arcos de círculo máximo, muestra que una figura esférica puede siempre pasar de una posicion a otra, sin salir de la esfera, por medio de una rotacion al rededor de cierto punto C de la misma esfera. Segun esto, el movimiento continuo de una figura esférica sobre la esfera podrá ser considerado como la sucesion de movimientos elementales i cada uno de éstos es una rotacion al rededor de cierto punto determinado de la esfera.

El sólido, ligado a la figura esférica, se mueve por consiguiente de tal manera que, a cada momento, su movimiento elemental es una rotacion al rededor de un eje que pasa por el punto fijo.

MOVIMIENTO JENERAL DE UN SÓLIDO INVARIABLE

Sean S i S' (fig. 11) dos posiciones de un sólido invariable; $A, B, C\ldots$ algunos puntos de S i $A', B', C'\ldots$ las posiciones que los mismos puntos ocupan en S'. Una traslacion cualquiera es siempre compatible con las ligazones de un sólido invariable libre; demos a S una traslacion igual al AA'; S vendrá en S'', A en A', B en B'', C en C'', etc.; se puede pasar ahora de la posicion S'' a la posicion S' sin mover el punto A'; es el caso estudiado mas arriba, del movimiento de un sólido invariable al rededor de un punto fijo i se sabe que se puede llevar S'' sobre S' por medio de una rotacion al rededor de cierto eje $A'X$ que pasa por el punto A'. En resúmen, se puede siempre pasar de S a S' por medio de una traslacion i de una rotacion.

Fig. 11.



La misma descomposicion del movimiento puede hacerse con un punto cualquiera del sólido en vez del punto A; se puede demostrar, entónces, que *cualquiera que sea el punto elejido, el eje de la rotacion queda paralelo a sí mismo.*

Consideremos en efecto una figura plana F, ligada al sólido S i situada en un plano perpendicular a $A'X$; al pasar el sólido de S a S'' la figura F se trasladará paralelamente a sí misma a F''; en seguida, la rotacion al rededor de $A'X$ la hará jirar en su mismo plano hasta ocupar una posicion F'; así F' i F'' estan en un mismo plano, paralelo al plano de F.

Cualquiera otra descomposicion del movimiento debe llevar finalmente F sobre F'. Supongamos que la descomposicion se haga con el punto B: la traslacion BB' llevará F, paralelamente a sí mismo en F_1'' por ejemplo i la rotacion, al rededor de un eje que pasa por B', deberá llevar F_1'' sobre F'. Como F_1'' está situado en un plano paralelo a F, los planos de F_1'' i F' deben ser paralelos o confundidos. Si estos planos estuvieran solo paralelos, ninguna rotacion al rededor de un eje situado a distancia finita podria llevar una figura sobre la otra, luego como el eje de rotacion pasa por un punto B' a distancia finita de F_1'' i F' es necesario que los planos de estas curvas esten confundidos. Ahora la rotacion al rededor del eje considerado debe llevar F_1'' sobre F'; luego el eje de la rotacion debe ser perpendicular al plano de estas figuras; de lo contrario F_1'' saldria de este plano i no podria coincidir con F.

La proyeccion de la traslacion sobre la direccion invariable del eje de rotacion es constante; en efecto, esta proyeccion es la distancia constante de los planos de las figuras F i F'.

El ángulo de la rotacion es tambien constante; en efecto, las dos figuras F'' i F_1'' tienen la misma orientacion que F; cada una debe confundirse con F' por medio de una rotacion en su plano; el ángulo de esta rotacion es por consiguiente el mismo.

De estas propiedades se deduce que un sólido invariable puede siempre pasar de una posicion a otra, por medio de una traslacion i de una rotacion al rededor de un eje paralelo a la traslacion.

Cuando un sólido invariable tiene un movimiento continuo en el espacio se puede considerar este movimiento como la sucesion de movimientos elementales, i cada uno de estos últimos podrá siempre descomponerse en una traslacion i una rotacion; ademas, en cada movimiento elemental, se podrá suponer que la traslacion es paralela al eje de rotacion; cada movimiento elemental será, pues, análogo al de un tornillo en su tuerca, es decir, será un movimiento helizoidal.

En resúmen, el movimiento continuo mas jeneral de un sólido invariable es una sucesion continua de movimientos elementales helizoidales.

Cualquiera otra descomposicion del movimiento debe llevar finalmente F sobre F'. Supongamos que la descomposicion se haga con el punto B: la traslacion BB' llevará F, paralelamente a sí mismo en F_1'' por ejemplo i la rotacion, al rededor de un eje que pasa por B', deberá llevar F_1'' sobre F'. Como F_1'' está situado en un plano paralelo a F, los planos de F_1'' i F' deben ser paralelos o confundidos. Si estos planos estuvieran solo paralelos, ninguna rotacion al rededor de un eje situado a distancia finita podria llevar una figura sobre la otra, luego como el eje de rotacion pasa por un punto B' a distancia finita de F_1'' i F' es necesario que los planos de estas curvas esten confundidos. Ahora la rotacion al rededor del eje considerado debe llevar F_1'' sobre F'; luego el eje de la rotacion debe ser perpendicular al plano de estas figuras; de lo contrario F_1'' saldria de este plano i no podria coincidir con F.

La proyeccion de la traslacion sobre la direccion invariable del eje de rotacion es constante; en efecto, esta proyeccion es la distancia constante de los planos de las figuras F i F'.

El ángulo de la rotacion es tambien constante; en efecto, las dos figuras F'' i F_1'' tienen la misma orientacion que F; cada una debe confundirse con F' por medio de una rotacion en su plano; el ángulo de esta rotacion es por consiguiente el mismo.

De estas propiedades se deduce que un sólido invariable puede siempre pasar de una posicion a otra, por medio de una traslacion i de una rotacion al rededor de un eje paralelo a la traslacion.

Cuando un sólido invariable tiene un movimiento continuo en el espacio se puede considerar este movimiento como la sucesion de movimientos elementales, i cada uno de estos últimos podrá siempre descomponerse en una traslacion i una rotacion; ademas, en cada movimiento elemental, se podrá suponer que la traslacion es paralela al eje de rotacion; cada movimiento elemental será, pues, análogo al de un tornillo en su tuerca, es decir, será un movimiento helizoidal.

En resúmen, el movimiento continuo mas jeneral de un sólido invariable es una sucesion continua de movimientos elementales helizoidales.

MOVIMIENTOS SIMULTÁNEOS DE UN SÓLIDO INVARIABLE

Cuando se refiere la posicion de un sólido invariable a un sistema de comparacion móvil en el espacio, el movimiento absoluto del sólido es la superposicion de dos movimientos simultáneos: uno relativo i el otro de arrastre. Se supone jeneralmente el sistema de comparacion de forma invariable, luego el movimiento de arrastre es un movimiento de sólido invariable.

Como en el caso del punto material, se puede considerar un número cualquiera de sistemas de comparacion animados, unos respecto de otros, de movimientos de arrastre relativos; en este caso, el movimiento absoluto del sólido invariable puede ser considerado como la superposicion de cierto número de movimientos simultáneos.

El problema que se trata de resolver es precisamente de determinar el movimiento absoluto de un sólido invariable animado de un número cualquiera de movimientos simultáneos.

Desde luego, podremos considerar solo los movimientos elementales, puesto que el movimiento continuo ės la sucesion de movimientos elementales; ademas cada movimiento elemental componente podrá siempre descomponer en una traslacion i una rotacion.

COMPOSICION DE LAS TRASLACIONES

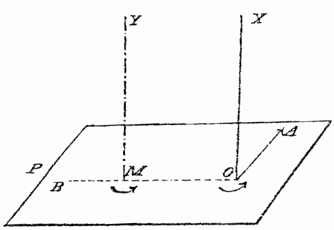
Se supone un sólido animado de un número cualquiera de traslaciones simultáneas; en este caso, todos los puntos del sólido son animados, a cada momento, de las mismas velocidades simultáneas i éstas se componen, para cada punto, en una velocidad absoluta, resultante jeométrica de las primeras. La velocidad resultante será la misma para todos los puntos del sólido; luego el movimiento absoluto del sólido es tambien una traslacion.

Recíprocamente, un sólido animado de una traslacion puede ser considerado como animado de un número cualquiera de traslaciones simultáneas, con la condicion que la resultante jeométrica de las velocidades simultáneas de cada punto sea la velocidad del movimiento de traslacion considerado.

COMPOSICION DE UNA TRASLACION I DE UNA ROTACION

1.° *Supongamos la traslacion perpendicular a la rotacion;* sea (fig. 12), OX el eje de la rotacion, ω la velocidad angular, P un plano perpendicular a OX i $OA = v$ la velocidad de la traslacion; OA es contenido en el plano P. Sea OB una recta, situada en el plano P i perpendicular a OA. Si la rotacion tiene el sentido indicado por la flecha, un punto cualquiera M de OB es animado de dos movimientos elementales perpendiculares a OB i, en el punto M de la figura,

Fig. 12.



estos dos movimientos elementales son de sentido opuesto: uno resulta de la traslacion i tiene el sentido de OA, su magnitud es vdt; el otro resulta de la rotacion, su sentido es opuesto i su magnitud es $\omega \times OM \times dt$; luego si el punto M satisface a la relacion

$$(1) \qquad \omega \times OM = v$$

este punto no se moverá durante el tiempo dt. Sea MY un eje perpendicular al plano P; todos los puntos del sólido situados sobre MY quedarán inmóviles como el punto M, durante el tiempo dt, luego el movimiento resultante del sólido es una rotacion elemental al rededor de MY.

Sea x la velocidad angular de esta rotacion; para determinar x, busquemos el movimiento absoluto del punto O; este puede obtenerse en funcion de los movimientos componentes o del movimiento resultante i los dos valores deben ser iguales.

La rotacion al rededor de OX no da ningun movimiento al punto O i la traslacion le da un movimiento elemental, dirijido segun OA, e igual a vdt; la rotacion resultante x da al mismo punto un cambio de lugar igual a $x \times MO \times dt$. Para que éste tenga la misma direccion que $v\,dt$ es necesario que la rotacion al rededor de MY tenga el mismo sentido que ω; ademas se debe tener

$$x \times MO \times dt = v\,dt$$

Luego

$$x = \frac{v}{MO}$$

I, segun (1)

$$x = \omega$$

En resúmen, una rotacion i una traslacion perpendicular al eje de la rotacion se componen en una rotacion de misma velocidad angular i de mismo sentido; el eje de la rotacion resultante es paralelo al primero, i la distancia de los dos ejes es $\frac{v}{\omega}$.

Recíprocamente una rotacion al rededor de un eje puede reemplazarse por una rotacion igual i de mismo sentido al rededor de un eje paralelo i de una traslacion perpendicular al plano de los dos ejes; la velocidad de la traslacion es igual al producto de la velocidad angular por la distancia de los dos ejes.

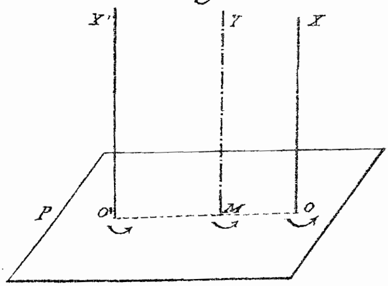
2.º *Supongamos la traslacion de direccion cualquiera.*—Se descompondrá la traslacion en dos componentes: una dirijida segun el eje de rotacion, la otra perpendicular; esta última i la rotacion se componen en una sola rotacion, luego el sólido estará animado de una rotacion i de una traslacion paralela al eje de la rotacion: es un movimiento helizoidal.

COMPOSICION DE DOS ROTACIONES AL REDEDOR DE DOS EJES PARALELOS

1.º Supongamos las rotaciones de mismo sentido i sean ω i ω' las velocidades angulares. Consideremos (fig. 13) un plano P perpendicular a los dos ejes, i en este plano, la recta OO' que une los piés de los ejes. Un punto M de esta recta es animado de dos movimientos elementales, perpendiculares a OO';

ademas, si el punto está situado entre O i O' los sentidos de los movimientos elementales son contrarios: uno tiene por valor $\omega \times OM\ dt$ el otro $\omega' \times O'M\ dt$. Luego, si el punto considerado satisface a la relacion

Fig. 13.



$$(2) \quad \omega \times OM = \omega' \times O'M$$

su movimiento elemental resultante será nulo. La posicion del punto M está así perfectamente determinada i todos los puntos del sólido situados sobre una perpendicular MY al plano P quedarán al reposo; luego las dos rotaciones se componen en una sola, al rededor del eje MY; sea x la velocidad angular de esta rotacion resultante. Para determinar x, consideremos el punto O i busquemos cuáles son los cambios de lugar que dan, a este punto, las rotaciones componentes i la rotacion resultante; los efectos deben ser iguales.

El efecto de las rotaciones componentes sobre O se reduce a una rotacion al rededor de $O'X'$ i esta rotacion hace describir al punto O un camino $\omega' \times OO'\ dt$. La rotacion al rededor de MY debe hacer describir a O el mismo camino; se ve ya que el sentido de la rotacion x debe ser el mismo que el sentido de ω'; ademas esta rotacion x hace describir a O el camino $x \times MO\ dt$, luego se debe tener

$$x \times MO = \omega' \times OO'$$

O bien

$$x = \omega' \times \frac{OO'}{MO} = \omega'\left(1 + \frac{O'M}{MO}\right)$$

I, segun (2)

$$x = \omega + \omega'$$

Así la velocidad angular resultante es la suma de las velocidades angulares componentes.

2.° Supongamos las rotaciones de sentido contrario; sean ω i ω' las velocidades angulares i $\omega > \omega'$; se podrá reemplazar la rotacion ω por dos rotaciones del mismo sentido al rededor de dos ejes paralelos; elejiremos para uno de los componentes una de velocidad $-\omega'$ que destruirá el efecto de la rotacion ω' i quedará entónces una sola rotacion cuya velocidad es

$$x = \omega - \omega'$$

Sea z la distancia del eje resultante al eje de la rotaciou ω i a la distancia de los dos ejes dados, se tendrá como mas arriba

$$z = a\frac{\omega'}{x} = a\frac{\omega'}{\omega - \omega'}$$

3.° Si las dos rotaciones ω i ω' son iguales i de sentido contrario, las fórmulas precedentes dan

$$x = 0$$

$$z = \infty$$

La rotacion resultante tiene por consiguiente una velocidad angular nula i su eje está en el infinito; se averigua fácilmente que esta rotacion resultante equivale a una traslacion.

Supongamos, en efecto, que, en la figura 13, las dos rotaciones al rededor de OX i $O'X'$ sean iguales i de sentido contrario; un punto cualquiera M, situado sobre la recta OO', entre O i O', tendrá dos movimientos elementales componentes dirijidos perpendicularmente a OO' i del mismo sentido; su cambio de lugar resultante será tambien perpendicular a OO' e igual a

$$\omega \times OM \times dt + \omega \times O'M \times dt = \omega \times OO' \times dt$$

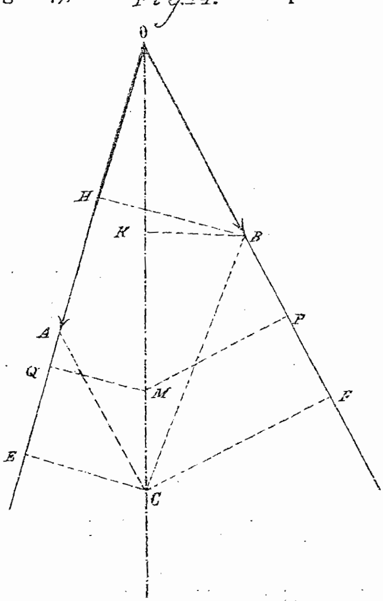
En resúmen, todos los puntos de OO' tienen un cambio de lugar elemental comun, lo que indica que las dos rotaciones iguales i de sentido contrario se componen en una traslacion perpendicular al plano de los dos ejes.

Recíprocamente una traslacion puede descomponerse en dos rotaciones iguales i de sentido contrario, al rededor de dos ejes cuyo plano es perpendicular a la traslacion.

COMPOSICION DE DOS ROTACIONES AL REDEDOR DE EJES QUE SE ENCUENTRAN

Se llama *eje de una rotacion* un vector dirijido segun el eje de rotacion i cuya medida es la velocidad angular de la rotacion; su sentido es tal que un observador colocado en el sentido de este vector, los piés en el punto de aplicacion, vea la rotacion efectuarse en el sentido *positivo.*

Sean entónces dos rotaciones cuyos ejes son OA i OB (fig. 14); consideremos un punto M del plano AOB i busquemos sus cambios de lugar elementales: los dos serán perpendiculares al plano AOB i, si el punto M está situado entre los dos ejes, los cambios de lugar serán de sentido contrario. Sean MP i MQ las perpendiculares bajadas desde M sobre los dos ejes; los dos cambios de lugar serán respectivamente: $OA \times QM \; dt$ i $OB \times MP \; dt$; luego si el punto M satisface a la relacion



$$OA \times QM = OB \times MP$$

su cambio de lugar resultante será nulo.

Supongamos que el punto M de la figura 14 satisfaga a esta relacion; se averigua que todos los puntos de la recta OM satisfacen a la misma relacion; luego las dos rotaciones se componen en una sola cuyo eje es dirijido segun OM.

Ademas la recta OM pasa por el punto C, vértice del paralelógramo construido sobre OA i OB; en efecto, si se escribe de dos maneras diferentes la medida del área del paralelógramo $OACB$ se obtiene

$$OA \times CE = OB \times CF$$

luego el punto C está sobre la recta OM. Sea x la velocidad angular de la rotacion resultante; para determinar x, consideremos el punto B i busquemos cuales son los cambios de lugar que dan a este punto las rotaciones componentes i la rotacion resultante; sean BH i BK las perpendiculares bajadas desde B sobre OA i OC; las rotaciones componentes darán al punto B un cambio de lugar

$$OA \times BH \times dt$$

i la rotacion resultante le dará un cambio de lugar

$$x \times BK \times dt$$

esto prueba ya que, respecto al punto B, los ejes OA i x deben tener el mismo sentido, así el eje resultante es dirijido desde O hácia C; se debe tener en seguida

$$x \times BK = OA \times BH$$

El segundo miembro es el área del paralelógramo $OACB$ i la misma área es doble del área del triángulo OCB, su medida es por consiguiente tambien $OC \times BK$; se tiene por consiguiente

$$x \times BK = OC \times BK$$

O bien

$$x = OC$$

Así el eje de la rotacion resultante es la resultante jeométrica de los ejes de las rotaciones componentes.

Del caso de dos rotaciones se pasa inmediatamente al caso de un número cualquiera de rotaciones cuyos ejes son concurrentes; i se llega al siguiente teorema.

TEOREMA.—*Un número cualquiera de rotaciones simultáneas, cuyos ejes son concurrentes, se componen en una rotacion resultante cuyo eje es la resultante jeométrica de los ejes de las rotaciones componentes.*

Recíprocamente *una rotacion puede siempre descomponerse en un número cualquiera de rotaciones simultáneas, cuyos ejes tienen por resultante jeométrica el eje de la rotacion considerada.*

COMPOSICION DE UN NÚMERO CUALQUIERA DE ROTACIONES I DE TRASLACIONES SIMULTÁNEAS

Cada rotacion puede reemplazarse por una rotacion igual al rededor de un eje paralelo que pasa por un punto fijo i arbitrario O i por una traslacion perpendicular al plano de los dos ejes; luego el sólido será animado de cierto número de traslaciones i de cierto número de rotaciones al rededor de ejes que todos concurren en el punto O. Las traslaciones simultáneas pueden componerse en una sola i las rotaciones simultáneas en una rotacion resultante; finalmente, el conjunto de los movimientos simultáneos será reemplazado por una rotacion i una traslacion, es decir por un movimiento helizoidal.

A. OBRECHT

(Continuará)