ANALES
DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Sucesor

De la:	Y del:
«SOCIEDAD DE INGENIERIA»	«INSTITUTO DE INGENIEROS»
Fundada el 31 de Mayo de 1888	Fundado el 28 de Octubre de 1888

Con Personalidad Jurídica desde el 28 de Diciembre de 1900

Adherido a la USAI y a la CONFERENCIA MUNDIAL DE LA ENERGIA

AÑO LXII ● NOVIEMBRE - DICIEMBRE DE 1949 ● N.os 11 - 12

Comisión Editora: *Raúl Sáez S. (Pdte.), Carlos Ponce de León, Jorge von Bennewitz y José Pablo Domínguez*

Ing. Jorge del Río B.

División de Estructuras

Método de los relajamientos (Relaxation Method) **aplicado a los marcos rígidos y vigas continuas**

(Continuación)

Apliquemos ahora el método de los relajamientos a una viga continua. Antes de sacar conclusiones más generales resolvamos primeramente el siguiente problema:

1 (K=1) 2 (K=1) 3 (K=2) 4 (K=1) 5

△ △ △ △ △

Sea la viga continua de cuatro tramos representada en la figura. Las rigideces de cada uno de los tramos están dadas en los valores entre paréntesis. Supongamos aplicado al nudo 5 un momento M y supongamos que este momento sea de tal magnitud que produzca en el nudo 2 una rotación en que $E\Theta_2 = 1$.

Queremos averiguar cuánto vale este momento M, cuáles son las rotaciones de los nudos 1, 3, 4 y 5 y cuales son los momentos M_2, M_3 y M_4.

Para esto establezcamos las ecuaciones de Slope-Deflection para este caso y éstas son:

$$M_{12} = 2K_{12}(2\Theta_1 + \Theta_2) = 0$$
$$M_{21} = 2K_{12}(2\Theta_2 + \Theta_1)$$
$$M_{23} = 2K_{23}(2\Theta_2 + \Theta_3)$$
$$M_{32} = 2K_{23}(2\Theta_3 + \Theta_2)$$

$$M_{34} = 2K_{34}(2\Theta_3 + \Theta_4)$$
$$M_{43} = 2K_{34}(2\Theta_4 + \Theta_3)$$
$$M_{45} = 2K_{45}(2\Theta_4 + \Theta_5)$$
$$M_{54} = 2K_{45}(2\Theta_5 + \Theta_4) = -M$$

$$M_{21} + M_{23} = 0$$
$$M_{32} + M_{34} = 0$$
$$M_{43} + M_{45} = 0$$
$$M_{54} + M = 0$$

De aquí deducimos que:

$$2K_{12}\Theta_1 + K_{12}\Theta_2 = 0 = R_1$$
$$2\Sigma K_2\Theta_2 + K_{12}\Theta_1 + K_{23}\Theta_3 = 0 = R_2$$
$$2\Sigma K_3\Theta_3 + K_{23}\Theta_2 + K_{34}\Theta_4 = 0 = R_3$$
$$2\Sigma K_4\Theta_4 + K_{34}\Theta_3 + K_{45}\Theta_4 = 0 = R_4$$
$$2K\ \Theta_5 + K_{45}\Theta_4 + M/2 = 0 = R_5$$

La tabla de operaciones será:

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
$E\Theta_1 = 1$	$2K_{12}$	K_{12}			
$E\Theta_2 = 1$	K_{12}	$2\Sigma K_2$	K_{23}		
$E\Theta_3 = 1$		K_{23}	$2\Sigma K_3$	K_{34}	
$E\Theta_4 = 1$			K_{34}	$2\Sigma K_4$	K_{45}
$E\Theta_5 = 1$				K_{45}	$2K_{54}$

Esta tabla de operaciones podríamos haberla establecido sin necesidad de escribir las ecuaciones de slope-deflection tal como lo vimos en el problema anterior y como conocemos los valores K podríamos haber escrito directamente la siguiente tabla:

	R_1	R_2	R^3	R_4	R_4
$E\Theta_1 = 1$	2	1			
$E\Theta_2 = 1$	1	4	1		
$E\Theta_3 = 1$		1	6	2	
$E\Theta_4 = 1$			2	6	1
$E\Theta_5 = 1$				1	2

Siguiendo nuestro método de los relajamientos la tabla de residuos será:

$E\Theta_1$	$E\Theta_2$	$E\Theta_3$	$E\Theta_4$	$E\Theta_5$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
—½	0	0	0	0	—1	—½			
0	1	0	0	0	0	3,5	1		
		—3,5	0	0	0	0	—20	— 7	
		0	10	0	0	0	0	53	10
				53	0	0	0	0	96

Como nos pusimos la condición de que $E\Theta_2=1$, necesariamente $E\Theta_1=-\frac{1}{2}$, como se deduce también de la misma tabla de operaciones. El residuo $R_5=96$ naturalmente deberá ser igual a $M/2$, siendo M el valor buscado.

Los momentos en los demás nudos serán:

$M_{21}=\ 3$

$M_{32}=-12$

$M_{43}=\ 66$

$M_{54}=-192$

Resolvamos ahora el siguiente problema, inverso al anterior: En la misma viga continua pongamos un momento M aplicado al nudo 1 y supongamos que $E\Theta_4=1$. Tratemos de conocer cuál es el valor de este momento aplicado, cuáles son los momentos en los otros nudos y cuáles son las rotaciones de éstos.

La tabla de operaciones erá exactamente igual a la anterior y la tabla de residuos tendrá la forma siguiente:

$E\Theta_1$	$E\Theta_2$	$E\Theta_3$	$E\Theta_4$	$E\Theta_5$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
0	0	0	0	—½				—½	—1
			1				2	—5,5	0
		—2,75				—2,75	—14,5	0	
	14,5				14,5	55,25	0		
—55,25					96	0			

Aquí tenemos que $R_1=96$ que es necesariamente igual a $M/2$ e igual al residuo $R_5=96$ que obtuvimos en el problema anterior cuando aplicábamos un momento M al nudo 5. El teorema de Maxwell nos dice lo mismo.

Los momentos en los demás nudos serán:

$M_{45}=\ 3$

$M_{34}=-18$

$M_{23}=\ 52,5$

$M_{12}=-192$ (valor igual a M_{54} en el problema anterior)

Poniendo en un solo cuadro los valores de $E\Theta$ y M obtenidos de los dos problemas anteriores y poniendo a la izquierda de las verticales de apoyo los valores obtenidos del primer problema y a la derecha los obtenidos del segundo tendremos el siguiente:

	1		2		3		4		5	
$E\Theta =$	—½	—55,25	1	14,5	—3.5	—2.75	10	1	—53	—½
$M =$	0	192	3	52,5	12	18	66	3	192	0

Teniendo este cuadro a la vista, y considerando el nudo 4, podremos observar que si aplicamos a este nudo un momento M tal que produzca un $E\Theta_4 = 10$, las rotaciones en los demás nudos serán:

$$E\Theta_1 = -\tfrac{1}{2},\quad E\Theta_2 = 1,\quad E\Theta_3 = -3{,}5 \quad \text{y} \quad E\Theta_5 = -5.$$

Este último valor se obtiene observando que si $E\Theta_4 = 1$, $E\Theta_5 = -\tfrac{1}{2}$, por lo tanto si $E\Theta_4 = 10$, $E\Theta_5 = -5$.

Ahora al tener una rotación $E\Theta_4 = 10$, sabemos que $M_{43} = 66$ y que $M_{45} = 3 \cdot 10 = 30$ por lo tanto el momento necesario que debemos aplicar en 4 para producir la rotación $E\Theta_4 = 10$ es

$$M = 66 + 30 = 96$$

Observemos que este valor es igual a los residuos R_1 y R_5 obtenidos en los problemas anteriores.

Ahora consideremos el nudo 3. Vemos que si hacemos la suma de productos

$$3{,}5 \times 18 + 12 \times 2{,}75 = 96$$

o sea nos da exactamente el mismo valor y por lo tanto si aplicamos un momento exterior de 96 al nudo 3 tendremos que

$$M_{32} = 12 \times 2{,}75 = 33$$
$$M_{34} = 18 \times 3{,}5 = 63$$
$$M_{32} + M_{34} = 33 + 63 = 96$$

y la rotación de este nudo será $2{,}75 \times 3{,}5 = 9{,}625$

Si ahora aplicamos al nudo 2 un momento $M = 96$ tendremos

$$M_{21} = 3 \times 14{,}5 = 43{,}5$$
$$M_{23} = 1 \times 52{,}5 = 52{,}5$$
$$M_{21} + M_{23} = 43{,}5 + 52{,}5 = 96$$

y la rotación será $E\Theta_2 = 14.5$.

Considerando todo lo anterior podemos ver que es fácil saber los valores de los momentos en los nudos para cualquier sistema de cargas aplicadas sobre la misma viga.

Supongamos que sobre el tramo 2-3 tenemos una carga continua uniforme tal que nos dé momentos fijos de —100 y 100 a la izquierda y derecha respectivamente. Vamos a poner a continuación el desarrollo completo del problema y explicaremos lo que hemos hecho.

	1		2		3		4		5	
K =		1		1		2		1		
2ΣK =	2		4		6		6		2	
EΘ =	-1/2	-55.25	1	14,5	-3.5	-2,75	10	1	-53	-1/2
M =	0	-192	3	52,5	12	18	66	3	-192	0
C =		96	43.5	52,5	33	63	66	30	96	
MF =				-100	100					
	0		45,2	54,8	18.8	-18,8		3,1	0	
			8,6	-8,6	-34,3	-65,7		10,8		
			53,8	-53,8	84,5	-84,5		13,9		

Lo que hemos hecho aquí es lo siguiente.

En la primera línea hemos puesto los valores K, que para este caso no son más que coeficientes de la tabla de operaciones.

En la segunda línea hemos puesto los valores $2\Sigma K$ que también son coeficientes de la tabla de operaciones.

En seguida hemos dado a $E\Theta_1 = -\frac{1}{2}$ y $E\Theta_2 = 1$ y por lo tanto los residuos en el nudo 2 serán $4 - \frac{1}{2} = 3{,}5$. Como tenemos que anular este residuo necesariamente tenemos que darle a $E\Theta_3 = -3{,}5$ a fin de que $R_2 = 0$.

Al darle $E\Theta_2 = 0$ y $E\Theta_3 = -3{,}5$ nos quedará un $R_3 = 1 - 3{,}5 \times 6 = -20$ pero como tenemos que anular este residuo tendremos que darle a $E\Theta_4 = 10$.

Al darle a $E\Theta_3 = -3{,}5$ y $E\Theta_4 = 10$ el residuo en 4 será $R_4 = -7 + 60 = 53$ y por lo tanto $E\Theta_5 = -53$.

En la misma forma podemos calcular los valores de $E\Theta$ cuando $E\Theta_5 = -\frac{1}{2}$ y $E\Theta_4 = 1$, partiendo esta vez desde la derecha.

Teniendo estos valores de los ángulos es fácil calcular los valores de los momentos respectivos por las ecuaciones de slope deflection, pero observando que algunos de ellos los calculamos directamente y solamente hemos aplicado la ecuación para dos valores. Así $M_{21} = 3K_{12}$, $M_{32} = 6\ (K_{12} + K_{23})$, $M_{54} = 2 \times 96$, $M_{45} = 3K_{45}$, $M_{34} = 6\ (K_{45} + K_{34})$.

Expliquemos ahora como hemos obtenido los momentos finales. Si aplicamos sobre el nudo 2 un momento de 100 sabemos que

$$M_{23} = \frac{100 \times 52{,}5}{96} = 54{,}8$$

este momento producirá en 3

$$M_3 = \frac{54{,}8 \times 18}{52{,}5} = 18{,}8$$

y en el nudo 4

$$M_4 = -\frac{54,8\times 3}{52,5} = -3,1$$

Ahora si aplicamos en el nudo 3 un momento de —100 tendremos

$$M_{32} = \frac{-100\times 33}{96} = -34,3$$

$$M_{34} = -65,7$$

El momento —34,3 producirá en 2 un momento

$$M_2 = -\frac{-34,3\times 3}{12} = 8,57$$

y en el nudo 4 un momento

$$M_4 = \frac{65,7\times 3}{18} = 10,8$$

Y en seguida calculamos los momentos totales.

Vemos que los coeficientes C nos distribuyen los momentos aplicados a los nudos inmediatamente y que sus influencias sobre otros nudos las podemos conocer en forma rápida.

Sin duda que el ejemplo desarrollado aquí sale más corto aplicando el método de Cross, pero si sobre esta viga hubiéramos tenido muchos estados de cargas, sobrecargas y cargas fijas, y hubiéramos querido conocer los momentos máximos y mínimos producidos, entonces sin duda alguna este método usado aquí es bastante más rápido y expedito.

Ahora si esta viga continua estuviera sobre pilares rígidamente unidos, formando marco rígido, y quisiéramos conocer la influencia de estos pilares en los momentos de apoyo, este método nos da una gran economía de tiempo. En este caso podemos construir la tabla de operaciones de un modo semejante y muy fácilmente.

J. del R. B.