CONTRIBUCION AL CÁLCULO DE PUENTES
POR EL MÉTODO DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA

POR

CÁRLOS HOERNING D.

En los testos de Estática Gráfica que hemos consultado no se encuentra el sigui te problema:

Determinar, por el método de las líneas de influencia, el momento máximo que produce en una seccion dada de la viga por la accion de una carga móvil uniformeme repartida en una estension limitada.

Para simplificar, trataremos solo el caso de una viga sobre dos apoyos, solicitada rectamente.

Es sabido que la superficie de influencia de M para la seccion a de la viga (lám. II, fig. 1) es el triángulo $A\ B\ C$

Una carga uniformemente repartida en la estension $D\ E = d$ produce un M_a p porcional a la superficie $D\ E\ F\ G$.

Para tener el M_a máximo debido a la carga p, se debe buscar la posicion del pun E (o del D) que conduce al máximo del área $D\ E\ F\ G$.

Observando en la figura 2 que las superficies de influencia a la derecha i a la i quierda de $o\ y$ son del mismo signo, debemos considerar tambien del mismo signo la abscisas x i x'.

Escribiendo $c\ o = b$, tendremos:

$$\text{ecuacion de la recta B C} \ldots\ldots\ldots \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{(I)}$$

$$\text{» » » A C} \ldots\ldots\ldots \frac{x'}{a'} + \frac{y'}{b} = 1 \qquad \text{(II)}$$

Designando por x, x', y e y' las distancias de la figura, resulta

$$\text{área } CGOE = \frac{b+y}{2} x$$

$$\text{» } FCDO = \frac{b+y'}{2} x'$$

$$\text{área } FCGDOE = S = \frac{1}{2}[(b+y)x + (b+y')x']$$

De las ecuaciones (I) i (II) deducimos

$$y = \left(1 - \frac{x}{a}\right) b$$

$$y' = \left(1 - \frac{x'}{a}\right) b$$

Introduciendo

$$S = \frac{1}{2}\left[b\left(2 - \frac{x}{a}\right)x + b\left(2 - \frac{x'}{a'}\right)x'\right]$$

Como $x' = d - x$

$$S = \frac{b}{2}\left(2x - \frac{x^2}{a} + 2d - 2x - \frac{d^2 - 2dx + x^2}{a'}\right)$$

$$S = \frac{b}{2}\left(2d - \frac{d^2}{a'} - x^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) + x\frac{2d}{a'}\right) \qquad \text{(III)}$$

Para tener el máximo de S,

$$\frac{dS}{dx} = 0$$

$$-2x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) + \frac{2d}{a'} = 0$$

$$x = \frac{d}{a'} : \frac{aa'}{a+a'}$$

Como $a + a' = l$

$$x = \frac{da}{l}$$

Construccion.—Se trata de buscar la cuarta proporcional entre d, a i l.
La figura 3 muestra una construccion cómoda.
Para tener la espresion analítica de S máximo, introduzcamos el valor de x en (III)

$$S = \frac{b}{2}\left(2d - \frac{d^2}{a'} - \frac{d^2a^2}{l^2}\,\frac{l}{aa'} + \frac{da}{l}\,\frac{2d}{a'}\right)$$

$$= \frac{b}{2}\left(2d - \frac{d^2}{a'} + \frac{d^2a}{la'}\right)$$

$$a = l - a'$$

$$S = \frac{b}{2}\left[2\,d - \frac{d^2}{a'} + d^2\left(\frac{l}{a'} - \frac{1}{l}\right)\right]$$

$$= \frac{b}{2}\left(2\,d - \frac{d^2}{l}\right)$$

Por otra parte, b es el momento que produce la fuerza $P = 1$ colocada a plomo de la seccion a. Su valor absoluto es

$$\frac{a}{l}(l - a)$$

Luego:

$$S = \frac{1}{2}\;\frac{a}{l}(l - a)\;\left(2\,d - \frac{d^2}{l}\right)$$

Como el último paréntesis no depende de la abscisa a, podemos escribir para una seccion cualquiera:

$$S_a = K\frac{a}{l}\,(l - a)$$

i M_a debido a la carga p

$$M_a = -K'\frac{a}{l}(l - a)$$

en que

$$K' = \frac{p}{2}\left(2\,d - \frac{d^2}{l}\right)$$

La construccion que hemos indicado es utilizable tambien en otros casos para los cuales la línea de influencia se compone de partes rectas.

Una aplicacion de la teoría espuesta, se presenta en el cálculo de un puente carretero de concreto i de triple articulacion, en que el peso de un rodillo para apisonamiento de calzadas se trasmite a la bóveda por intermedio del lastre. Segun la teoría alemana, la reparticion de la presion en el estradós de la bóveda puede considerarse uniforme sobre la superficie encerrada por un haz de rayos a 45° respecto la vertical i que parte desde la jeneratriz de contacto del rodillo con la calzada. Ver: Haudb. der Ingev. II Teil, I Bd., páj. 139 (4. Aufl.)

La superficie de influencia de M para el arco de tres rótulas se compone de dos triángulos, de signo contrario. Ver la obra citada, páj. 184 i Müller-Boeslau, Graphische Statik, Bd. I. páj. 190 (3. Aufl.)

CÁRLOS HOERNING D.,
Injeniero civil.